Interrogation n°12 - Sujet A

Exercice 1. Soit $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, soit $\ell \in \mathbf{R}$. Donner la définition de l'assertion « $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. ».

Corrigé 1.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant N_\varepsilon,\ |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Exercice 2. Donner la caractérisation « epsilonesque » de la borne supérieure d'un ensemble A majoré et non vide.

Corrigé 2. M est la borne supérieure de A si et seulement si M est un majorant de A et

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ M - \varepsilon < x.$$

Exercice 3. Soit $A = \left\{\frac{3}{2^n} + 1\ :\ n \in \mathbf{N}\right\}$. Déterminer, si elles existent, les bornes supérieure et inférieure de A.

Corrigé 3. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $1 + \dfrac{3}{2^n} \geqslant 1$, donc 1 est un minorant de A. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{2^n} + 1 = 1$, donc $\inf(A) = 1$. La suite de terme général $1 + \dfrac{3}{2^n}$ est décroissante, donc est majorée par son premier terme qui est 4. Or $4 \in A$, donc $\max(A) = 4$ et en particulier $\sup(A) = 4$.

Exercice 4.

1. Calculer $\lfloor -5 \rfloor$ et $\lfloor -5,01 \rfloor$.
2. Soit $(\alpha, x) \in \mathbf{R}^2$. Déterminer l'intervalle I pour que l'équivalence suivante soit vraie :

$$\lfloor x \rfloor = \alpha \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha \in \mathbf{Z} \\ \alpha \in I \end{cases}$$

(on demande un résultat sans justification ici).

Corrigé 4.

1. On a $\lfloor -5 \rfloor = -5$ et $\lfloor -5,01 \rfloor = -6$.
2. $I =]x - 1\,;\, x]$.

Interrogation n°12 - Sujet B

Exercice 1. Soit $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, soit $\ell \in \mathbf{R}$. Donner la définition de l'assertion « $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$. ».

Corrigé 1.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant N_\varepsilon,\ |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Exercice 2. Donner la caractérisation « epsilonesque » de la borne inférieure d'un ensemble A minoré et non vide.

Corrigé 2. m est la borne inférieure de A si et seulement si M est un minorant de A et

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ x < m + \varepsilon.$$

Exercice 3. Soit $A = \left\{ \frac{2}{3^n} + 2 \ :\ n \in \mathbf{N} \right\}$. Déterminer, si elles existent, les bornes supérieure et inférieure de A.

Corrigé 3. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $2 + \dfrac{2}{3^n} \geqslant 2$, donc 2 est un minorant de A. De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2}{3^n} + 2 = 2$, donc $\inf(A) = 2$. La suite de terme général $2 + \dfrac{2}{3^n}$ est décroissante, donc est majorée par son premier terme qui est 4. Or $4 \in A$, donc $\max(A) = 4$ et en particulier $\sup(A) = 4$.

Exercice 4.

1. Calculer $\lfloor -3 \rfloor$ et $\lfloor -3,01 \rfloor$.
2. Soit $(\alpha, x) \in \mathbf{R}^2$. Déterminer l'intervalle I pour que l'équivalence suivante soit vraie :

$$\lfloor x \rfloor = \alpha \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha \in \mathbf{Z} \\ \alpha \in I \end{cases}$$

(on demande un résultat sans justification ici).

Corrigé 4.

1. On a $\lfloor -3 \rfloor = -3$ et $\lfloor -3,01 \rfloor = -4$.
2. $I =]x-1\,;\,x]$.