Interrogation n°13 - Sujet A

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ convergeant vers 0. Compléter les équivalents suivants :

$$\sin(u_n) \sim$$
$$(1+u_n)^3 - 1 \sim$$

Corrigé 1.

$$\sin(u_n) \sim u_n$$
$$(1+u_n)^3 - 1 \sim 3u_n$$

Exercice 2. Enoncer le théorème de la limite monotone pour une suite décroissante $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

Corrigé 2.

1. Si u est minorée, alors u converge vers un réel ℓ, avec
$$\ell = \inf\{u_n \ : \ n \in \mathbf{N}\}.$$
De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geqslant \ell$.
2. Si u n'est pas minorée, alors u diverge vers $-\infty$.

Exercice 3. Donner, si elle existe, la limite pour chacune des suites dont le terme général est précisé ci-après. On n'utilisera pas d'équivalents ou de petit o. On lèvera « à la main » les éventuelles formes indéterminées rencontrées et on appliquera explicitement le théorème des croissances comparées.

1. $u_n = \dfrac{\ln(n) - n^2 + 1}{\mathrm{e}^{-n} + \sqrt{n}}$;
2. $u_n = \sqrt{n^2+7} - n + 8$.

Corrigé 3. Soit $n \in \mathbf{N}$.

1. $u_n = \dfrac{n^2(\frac{\ln(n)}{n^2} - 1 + \frac{1}{n^2})}{\sqrt{n}(\frac{\mathrm{e}^{-n}}{\sqrt{n}} + 1)} = n^{\frac{3}{2}} \dfrac{\frac{\ln(n)}{n^2} - 1 + \frac{1}{n^2}}{\frac{\mathrm{e}^{-n}}{\sqrt{n}} + 1}$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n^2} = 0$ par le théorème de croissances comparées, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n^2} - 1 + \dfrac{1}{n^2} = -1$.
Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{\sqrt{n}} = 0$ par produit. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{\sqrt{n}} + 1 = 1$.
Finalement, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{3}{2}} = +\infty$, on obtient par produit et quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
2. On a $u_n = \sqrt{n^2+7} - \sqrt{n^2} + 8 = \dfrac{n^2+7-n^2}{\sqrt{n^2+7}+\sqrt{n^2}} + 8 = \dfrac{7}{\sqrt{n^2+7}+\sqrt{n^2}} + 8 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 8$ par simples opérations.

Exercice 4. Déterminer, si elle existe, la limite de la suite de terme général $\dfrac{\lfloor n^2+1 \rfloor}{3n^2+12}$.

Corrigé 4. *Méthode 1.* $\lfloor n^2+1 \rfloor = n^2+1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, d'où $\dfrac{\lfloor n^2+1 \rfloor}{3n^2+12} \sim \dfrac{n^2}{3n^2} \sim \dfrac{1}{3}$ et ainsi $\dfrac{\lfloor n^2+1 \rfloor}{3n^2+12} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{3}$.
Méthode 2. Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$n^2 < \lfloor n^2+1 \rfloor \leqslant n^2+1$$

d'où

$$\frac{n^2}{3n^2+12} < \frac{\lfloor n^2+1 \rfloor}{3n^2+12} \leqslant \frac{n^2+1}{3n^2+12}$$

Or $\dfrac{n^2}{3n^2+12} \sim \dfrac{n^2}{3n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{n^2+1}{3n^2+12} \sim \dfrac{n^2}{3n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{3}$. Finalement le théorème d'encadrement assure que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor n^2+1 \rfloor}{3n^2+12} = \frac{1}{3}.$$

Interrogation n°13 - Sujet B

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ convergeant vers 0. Compléter les équivalents suivants :

$$\tan(u_n) \sim$$
$$1 - \mathrm{ch}(u_n) \sim$$

Corrigé 1.

$$\tan(u_n) \sim u_n$$
$$1 - \mathrm{ch}(u_n) \sim -\frac{u_n^2}{2}$$

Exercice 2. Enoncer le théorème de la limite monotone pour une suite croissante $u \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

Corrigé 2.

1. Si u est majorée, alors u converge vers un réel ℓ, avec
$$\ell = \sup\{u_n \,:\, n \in \mathbf{N}\}.$$
De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant \ell$.
2. Si u n'est pas majorée, alors u diverge vers $+\infty$.

Exercice 3. Donner, si elle existe, la limite pour chacune des suites dont le terme général est précisé ci-après. On n'utilisera pas d'équivalents ou de petit o. On lèvera « à la main » les éventuelles formes indéterminées rencontrées et on appliquera explicitement le théorème des croissances comparées.

1. $u_n = \dfrac{\ln(n) - n^3 + 1}{\mathrm{e}^{-n} + \sqrt{n}}$;
2. $u_n = \sqrt{n^2 - 7} - n + 1$.

Corrigé 3. Soit $n \in \mathbf{N}$.

1. $u_n = \dfrac{n^3\left(\frac{\ln(n)}{n^3} - 1 + \frac{1}{n^3}\right)}{\sqrt{n}\left(\frac{\mathrm{e}^{-n}}{\sqrt{n}} + 1\right)} = n^{\frac{5}{2}} \dfrac{\frac{\ln(n)}{n^3} - 1 + \frac{1}{n^3}}{\frac{\mathrm{e}^{-n}}{\sqrt{n}} + 1}$.
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n^3} = 0$ par le théorème de croissances comparées, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n^3} - 1 + \dfrac{1}{n^2} = -1$.
   Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{\sqrt{n}} = 0$ par produit. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{\sqrt{n}} + 1 = 1$.
   Finalement, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{5}{2}} = +\infty$, on obtient par produit et quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
2. On a $u_n = \sqrt{n^2-7} - \sqrt{n^2} + 1 = \dfrac{n^2 - 7 - n^2}{\sqrt{n^2-7} + \sqrt{n^2}} + 1 = \dfrac{-7}{\sqrt{n^2-7} + \sqrt{n^2}} + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ par simples opérations.

Exercice 4. Déterminer, si elle existe, la limite de la suite de terme général $\dfrac{\lfloor n^2+1 \rfloor}{5n^2+11}$.

Corrigé 4. *Méthode 1.* $\lfloor n^2+1 \rfloor = n^2 + 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, d'où $\dfrac{\lfloor n^2+1 \rfloor}{5n^2+11} \sim \dfrac{n^2}{5n^2} \sim \dfrac{1}{5}$ et ainsi $\dfrac{\lfloor n^2+1 \rfloor}{5n^2+11} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{5}$.
Méthode 2. Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$n^2 < \lfloor n^2+1 \rfloor \leqslant n^2 + 1$$

d'où

$$\frac{n^2}{5n^2+11} < \frac{\lfloor n^2+1 \rfloor}{5n^2+11} \leqslant \frac{n^2+1}{5n^2+11}$$

Or $\dfrac{n^2}{5n^2+11} \sim \dfrac{n^2}{5n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{5}$ et $\dfrac{n^2+1}{5n^2+11} \sim \dfrac{n^2}{5n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{5}$. Finalement le théorème d'encadrement assure que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor n^2+2 \rfloor}{5n^2+11} = \frac{1}{5}.$$