Interrogation n°14 - Sujet A

Exercice 1. Trouver un équivalent le plus simple possible des suites ci-dessous :

$$u_n = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \qquad v_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \qquad w_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-4} \qquad x_n = \exp\left(\frac{1}{n^2}\right) - \sqrt{1+\frac{3}{n}}$$

Corrigé 1.

1. On a $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où $\operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \sim \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
2. On a $\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{2}{(n-1)(n+1)} \sim \dfrac{2}{n^2}$.
3. On a $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-4} = \dfrac{n+1-(n-4)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-4}} = \dfrac{5}{\sqrt{n}(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{4}{n}})} \sim \dfrac{5}{2\sqrt{n}}$.
4. On a $\exp\left(\dfrac{1}{n^2}\right) - 1 \sim \dfrac{1}{n^2}$ et $1 - \sqrt{1+\dfrac{3}{n}} \sim -\dfrac{3}{2n}$. Donc $\exp\left(\dfrac{1}{n^2}\right) - 1 = \mathrm{o}\left(1 - \sqrt{1+\dfrac{3}{n}}\right)$, puis

$$x_n \sim 1 - \sqrt{1+\frac{3}{n}} \sim -\frac{3}{2n}.$$

Exercice 2. Dire si l'assertion suivante est vraie ou fausse, et démontrez votre conjecture.

$$\text{Si } u_n \sim u_{n+1}, \text{ alors } u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Corrigé 2. La suite u de terme général n vérifie $u_n \sim n \sim u_{n+1}$, et pourtant

$$u_{n+1} - u_n = n+1-n = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Interrogation n°14 - Sujet B

Exercice 1. Trouver un équivalent le plus simple possible des suites ci-dessous :

$$u_n = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{n+3}}\right) \qquad v_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \qquad w_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n-1} \qquad x_n = \sqrt{1+\frac{7}{n}} - \exp\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Corrigé 1.

1. On a $\dfrac{1}{\sqrt{n+3}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où $\operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+3}}\right) \sim \dfrac{1}{\sqrt{n+3}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
2. On a $\dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+1} = -\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} \sim -\dfrac{1}{n^2}$.
3. On a $\sqrt{n+2} - \sqrt{n-1} = \dfrac{n+2-(n-1)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}} = \dfrac{3}{\sqrt{n}(\sqrt{1+\frac{2}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}})} \sim \dfrac{3}{2\sqrt{n}}$.
4. On a $\exp\left(\dfrac{1}{n^2}\right) - 1 \sim \dfrac{1}{n^2}$ et $1 - \sqrt{1+\dfrac{7}{n}} \sim -\dfrac{7}{2n}$. Donc $\exp\left(\dfrac{1}{n^2}\right) - 1 = \mathrm{o}\left(1 - \sqrt{1+\dfrac{7}{n}}\right)$, puis

$$x_n \sim 1 - \sqrt{1+\frac{3}{n}} \sim \frac{7}{2n}.$$

Exercice 2. Dire si l'assertion suivante est vraie ou fausse, et démontrez votre conjecture.

$$\text{Si } u_n \sim u_{n+1}, \text{ alors } u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Corrigé 2. La suite u de terme général n vérifie $u_n \sim n \sim u_{n+1}$, et pourtant

$$u_{n+1} - u_n = n+1-n = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$