# Interrogation n°15 - Sujet A

**Exercice 1.** Soit $a \in \mathbf{R}$.

1. Résoudre le système
$$\begin{cases} -x+y+z &= 1 \\ 2x-y+3z &= 2 \\ -x+2y+6z &= a \end{cases}$$
(on pourra distinguer des cas suivant les valeurs de $a$).
2. Indiquer le rang du système.

**Corrigé 1.** On a
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 6 & a \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 \end{array}\right)$$
Ainsi le système est de rang 2.

- Si $a = 5$, le système est compatible et l'ensemble des solutions est $\{(3-4z, 4-5z, z) \,:\, z \in \mathbf{R}\}$.
- Si $a \neq 5$, le système est incompatible et l'ensemble des solutions est $\varnothing$.

**Exercice 2.** Définir la notion de matrice symétrique.

**Corrigé 2.** Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est dite symétrique si $A = {}^tA$.

**Exercice 3.** Énoncer la formule du binôme de Newton pour les matrices (sans oublier les hypothèses !).

**Corrigé 3.** Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$ qui commutent. Alors pour tout $N \in \mathbf{N}$, $(A+B)^N = \sum\limits_{k=0}^{N} \binom{N}{k} A^k B^{N-k}$.

**Exercice 4.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $3AB$.

**Corrigé 4.** $3AB = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 0 & -3 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$.

## Interrogation n°15 - Sujet B

**Exercice 1.** Soit $a \in \mathbf{R}$.

1. Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+3y+2z & = & 1 \\ x+4y+z & = & 2 \\ y-z & = & a \end{array}\right.$$

(on pourra distinguer des cas suivant les valeurs de $a$).

2. Indiquer le rang du système.

**Corrigé 1.** On a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & a \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{array}\right)$$

Ainsi le système est de rang 2.

- Si $a=1$, le système est compatible et l'ensemble des solutions est $\{(-2-5z, 1+z, z) \,:\, z \in \mathbf{R}\}$.
- Si $a \neq 1$, le système est incompatible et l'ensemble des solutions est $\varnothing$.

**Exercice 2.** Définir la notion de matrice antisymétrique.

**Corrigé 2.** Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est dite antisymétrique si $A = -\,{}^tA$.

**Exercice 3.** Énoncer la formule du binôme de Newton pour les matrices (sans oublier les hypothèses !).

**Corrigé 3.** Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Soient $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$ qui commutent. Alors pour tout $N \in \mathbf{N}$, $(A+B)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} A^k B^{N-k}$.

**Exercice 4.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $3AB$.

**Corrigé 4.** $3AB = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 18 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.