# Interrogation n°16 - Sujet A

**Exercice 1.** Soit $(a, \ell) \in \mathbf{R}^2$, $f \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Définir, à l'aide de quantificateurs, l'assertion « $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ ».

**Corrigé 1.**

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathbf{R}, \quad (|x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon).$$

**Exercice 2.** Déterminer si la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ est inversible. Le cas échéant, donner l'inverse de $A$.

**Corrigé 2.**

$$A^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -30 & 10 & 5 \\ 18 & -2 & -3 \\ 14 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 3.** On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $J \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telle que $A = I_3 + J$.
2. Calculer $J^3$, et en déduire $J^n$ pour tout $n \geqslant 3$.
3. Déterminer $A^n$.

**Corrigé 3.**

1. $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.
2. On a $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbf{R})}$. Ainsi

$$J^n = \begin{cases} I_3 & \text{si} \quad n = 0 \\ A & \text{si} \quad n = 1 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si} \quad n = 2 \\ 0_{\mathcal{M}_3(\mathbf{R})} & \text{si} \quad n \geqslant 3 \end{cases}$$

3. Puisque $I_3$ et $J$ commutent, la formule du binôme de Newton assure que :

$$A^n = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2.$$