Interrogation n°17 - Sujet A

Exercice 1. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

Corrigé 1. Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle I. On suppose qu'il existe deux éléments a et b de I tels que $a \leqslant b$ et $f(a)f(b) \leqslant 0$ (c'est-à-dire tels que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires). Il existe alors un élément $c \in [a\,;\,b]$ vérifiant $f(c) = 0$.

Exercice 2. Soit I un intervalle, $f \in \mathcal{F}(I, \mathbf{R})$. Soit $a \in I$. Définir, à l'aide de quantificateurs, l'assertion « f est continue en a ».

Corrigé 2. On dit que f est **continue en** a si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in I, \qquad \big(|x-a| \leqslant \eta\big) \Longrightarrow \big(|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon\big).$$

Exercice 3. Prolonger par continuité en 0 la fonction suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^\star & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{2}} - 1}{\mathrm{e}^x - 1} \end{array}$$

Corrigé 3. On a $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{\frac{x}{2}}{x}$, d'où $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{1}{2}$. Il s'ensuit qu'on peut prolonger f en 0 en posant $f(0) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 4.

1. Donner un équivalent de $x \longmapsto \sin(x)$ en π.
2. Donner un équivalent de $x \longmapsto \ln\left(\dfrac{2+x}{x}\right)$ en $+\infty$.

Corrigé 4.

1. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\sin(x - \pi + \pi) = -\sin(x - \pi).$$

Or $x - \pi \underset{x \to \pi}{\longrightarrow} 0$, d'où $\sin(x) \underset{x \to \pi}{\sim} -(x - \pi)$ à l'aide de l'équivalent usuel de sinus en 0.

2. Soit $x \in \mathbf{R}_+^\star$.

$$\ln\left(\frac{2+x}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right).$$

Or $\dfrac{2}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où $\ln\left(\dfrac{2+x}{x}\right) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{2}{x}$ à l'aide de l'équivalent usuel de $y \longmapsto \ln(1+y)$ en 0.

Interrogation n°17 - Sujet B

Exercice 1. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

Corrigé 1. Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle I. On suppose qu'il existe deux éléments a et b de I tels que $a \leqslant b$ et $f(a)f(b) \leqslant 0$ (c'est-à-dire tels que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires). Il existe alors un élément $c \in [a\,;\,b]$ vérifiant $f(c) = 0$.

Exercice 2. Soit I un intervalle, $f \in \mathcal{F}(I, \mathbf{R})$. Soit $a \in I$. Définir, à l'aide de quantificateurs, l'assertion « f est continue en a ».

Corrigé 2. On dit que f est **continue en** a si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in I, \qquad \big(|x-a| \leqslant \eta\big) \Longrightarrow \big(|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon\big).$$

Exercice 3. Prolonger par continuité en 0 la fonction suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^\star & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{3}} - 1}{\tan(x)} \end{array}$$

Corrigé 3. On a $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\frac{x}{3}}{x}$, d'où $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{3}$. Il s'ensuit qu'on peut prolonger f en 0 en posant $f(0) = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 4.

1. Donner un équivalent de $x \longmapsto \cos(x)$ en $\dfrac{\pi}{2}$.
2. Donner un équivalent de $x \longmapsto \ln\left(\dfrac{3+x}{x}\right)$ en $+\infty$.

Corrigé 4.

1. Soit $x \in \mathbf{R}$.
$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$
Or $x - \dfrac{\pi}{2} \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} 0$, d'où $\cos(x) \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim} -\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ à l'aide de l'équivalent usuel de sinus en 0.
2. Soit $x \in \mathbf{R}_+^\star$.
$$\ln\left(\frac{3+x}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right).$$
Or $\dfrac{3}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où $\ln\left(\dfrac{3+x}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{3}{x}$ à l'aide de l'équivalent usuel de $y \longmapsto \ln(1+y)$ en 0.