Interrogation n°18 - Sujet A

Exercice 1. Énoncer le théorème de Rolle.

Corrigé 1. Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction définie sur $[a;b]$.

- Si f est continue sur le segment $[a;b]$,
- si f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$,
- et si $f(a) = f(b)$,

alors il existe $c \in \,]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 2. Soit f une fonction réelle, définie sur un intervalle I. Soit $a \in I$ qui n'est pas sur une extrémité de I. Définir la notion de « dérivabilité à droite de f en a » et définir le « nombre dérivé à droite de f en a. »

Corrigé 2. On dit que f est **dérivable à droite** en a si le taux d'accroissement τ_a de f en a possède une limite finie à droite en a. Cette limite s'appelle alors **le nombre dérivé à droite** de f en a et se note $f'_d(a)$. Autrement dit, si les limites suivantes existent et sont finies,

$$f'_d(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Exercice 3. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & [1\,;+\infty[\\ x & \longmapsto & 2x + \sqrt{1+x^4} \end{array}$.

1. Démontrer que f est bijective. On note g sa fonction réciproque.
2. Donner le sens de variation de g.
3. Donner, sans justifier ou très brièvement, la limite de g en $+\infty$.
4. Donner un équivalent de g en $+\infty$.

Corrigé 3.

1. Puisque $x \longmapsto \sqrt{1+x^4}$ est strictement croissante (composée de fonction strictement croissantes), f est strictement croissante en tant que somme de fonctions strictement croissantes, et f est continue par opérations. Le théorème de la bijection assure que f établit une bijection de $\mathbf{R}_+$ vers $f(\mathbf{R}_+) = \left[f(0)\,; \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \right[= [1\,;+\infty[$.
2. f est strictement croissante, donc f^{-1} est strictement croissante.
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f^{-1}(x) = +\infty$.
4. Soit $x \geqslant 1$. On a $f(g(x)) = x$, d'où $2g(x) + \sqrt{1+g(x)^4} = x$. Or, puisque $g(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$,

$$2g(x) + \sqrt{1+g(x)^4} = g(x)^2 \left(\frac{2}{g(x)^2} + \sqrt{\frac{1}{g(x)^2} + 1} \right) \underset{x \to +\infty}{\sim} g(x)^2$$

puis

$$g(x)^2 \underset{x \to +\infty}{\sim} x$$

et ainsi,

$$g(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \sqrt{x}$$

Interrogation n°18 - Sujet B

Exercice 1. Énoncer le théorème de Rolle.

Corrigé 1. Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction définie sur $[a;b]$.

- Si f est continue sur le segment $[a;b]$,
- si f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$,
- et si $f(a) = f(b)$,

alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 2. Soit f une fonction réelle, définie sur un intervalle I. Soit $a \in I$ qui n'est pas sur une extrémité de I. Définir la notion de « dérivabilité à gauche de f en a » et définir le « nombre dérivé à gauche de f en a. »

Corrigé 2. On dit que f est **dérivable à gauche** en a si le taux d'accroissement τ_a de f en a possède une limite finie à gauche en a. Cette limite s'appelle alors **le nombre dérivé à gauche** de f en a et se note $f'_g(a)$. Autrement dit, si les limites suivantes existent et sont finies,

$$f'_g(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Exercice 3. Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & [1\,;+\infty[\\ x & \longmapsto & 3x+\sqrt{1+x^4} \end{array}$.

1. Démontrer que f est bijective. On note g sa fonction réciproque.
2. Donner le sens de variation de g.
3. Donner, sans justifier ou très brièvement, la limite de g en $+\infty$.
4. Donner un équivalent de g en $+\infty$.

Corrigé 3.

1. Puisque $x \longmapsto \sqrt{1+x^4}$ est strictement croissante (composée de fonction strictement croissantes), f est strictement croissante en tant que somme de fonctions strictement croissantes, et f est continue par opérations. Le théorème de la bijection assure que f établit une bijection de $\mathbf{R}_+$ vers $f(\mathbf{R}_+) = \left[f(0)\,;\lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= [1\,;+\infty[$.
2. f est strictement croissante, donc f^{-1} est strictement croissante.
3. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, donc $\lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty$.
4. Soit $x \geqslant 1$. On a $f(g(x)) = x$, d'où $3g(x) + \sqrt{1+g(x)^4} = x$. Or, puisque $g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$,

$$3g(x) + \sqrt{1+g(x)^4} = g(x)^2\left(\frac{3}{g(x)^2} + \sqrt{\frac{1}{g(x)^2}+1}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)^2$$

puis

$$g(x)^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$$

et ainsi,

$$g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}$$