Interrogation n°19 - Sujet A

Exercice 1. Énoncer le théorème des accroissements finis. Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction réelle définie sur $[a;b]$.

Corrigé 1. Soit I un intervalle non réduit à un point, $f \in \mathcal{F}(I, \mathbf{R})$, $(a,b) \in I^2$ avec $a < b$.

Si f est continue sur le segment $[a;b]$, et si f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a;b[$, alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Exercice 2. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit B un événement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Soit A un événement. Définir la probabilité conditionnelle de A sachant B.

Corrigé 2. $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

Exercice 3. Enoncer la formule de Bayes.

Corrigé 3. Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\{E_1, \dots, E_n\}$ un système complet d'événements et A un événement tous de probabilité non nulle. On a :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \mathbb{P}_A(E_i) = \frac{\mathbb{P}(E_i)\mathbb{P}_{E_i}(A)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(E_k)\mathbb{P}_{E_k}(A)}.$$

Exercice 4. On tire cinq cartes dans un jeu de 32 cartes. Calculer la probabilité des événements suivants.

1. A : « on obtient deux carreaux, un cœur, un pique et un trèfle » ;
2. B : « on pioche une suite de cinq cartes consécutives, non nécessairement de la même couleur » ;
3. C : « on obtient exactement deux trèfles et une dame ».

Corrigé 4. On travaille sur $\Omega = \{A \in \mathcal{P}([\![1, 32]\!]) \mid \mathrm{Card}(A) = 5\}$.

1. On choisit les deux carreaux ($\binom{8}{2}$ possibilités), et une carte de chaque autre couleur ($\binom{8}{1} = 8$ possibilité à chaque fois). Ainsi
$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{8}{2} \times \binom{8}{1} \times \binom{8}{1} \times \binom{8}{1}}{\binom{32}{5}}.$$
2. On choisit la valeur la plus petite carte de la suite (4 possibilités), puis les valeurs des cinq cartes suivantes (1 possibilité : une fois la première valeur donnée, on n'a pas le choix des valeurs suivantes) et enfin les couleurs de chaque cartes ($\binom{4}{1} = 4$ possibilités à chaque fois). Donc
$$\mathbb{P}(B) = \frac{4 \times 4^5}{\binom{32}{5}}.$$
3. Introduisons C_0 : « on obtient deux trèfles et une dame exactement, sans la dame de trèfle » et C_1 : « on obtient deux trèfles et une dame exactement, avec la dame de trèfle », de sorte que $C = C_0 \cup C_1$ (union disjointe).
   - Dénombrement de C_0. On choisit deux trèfles non dame ($\binom{7}{2}$ possibilités), une dame non trèfle ($\binom{3}{1}$ possibilités) et les deux cartes restantes, non trèfles non dames ($\binom{21}{2}$). Donc $\mathrm{Card}(C_0) = \binom{7}{2} \times \binom{3}{1} \times \binom{21}{2}$.
   - Dénombrement de C_1. On choisit la dame de trèfle (1 possibilité), un trèfle non dame ($\binom{7}{1}$ possibilités) et les trois cartes restantes, non trèfles non dames ($\binom{21}{3}$ possibilités). Donc $\mathrm{Card}(C_1) = \binom{7}{1} \times \binom{21}{3}$.

   Finalement,
$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C_0) + \mathbb{P}(C_1) = \frac{\binom{7}{2} \times \binom{3}{1} \times \binom{21}{2} + \binom{7}{1} \times \binom{21}{3}}{\binom{32}{5}}.$$

Interrogation n°19 - Sujet B

Exercice 1. Enoncer le théorème des accroissements finis.

Corrigé 1. Soit I un intervalle non réduit à un point, $f \in \mathcal{F}(I, \mathbf{R})$, $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$.

Si f est continue sur le segment $[a; b]$, et si f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a; b[$, alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Exercice 2. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit B un événement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Soit A un événement. Définir la probabilité conditionnelle de A sachant B.

Corrigé 2. $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

Exercice 3. Enoncer la formule de Bayes.

Corrigé 3. Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\{E_1, \ldots, E_n\}$ un système complet d'événements et A un événement tous de probabilité non nulle. On a :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \mathbb{P}_A(E_i) = \frac{\mathbb{P}(E_i)\mathbb{P}_{E_i}(A)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(E_k)\mathbb{P}_{E_k}(A)}.$$

Exercice 4. On tire cinq cartes dans un jeu de 32 cartes. Calculer la probabilité des événements suivants.

1. A : « on obtient deux trèfles, un cœur, un pique et un carreau » ;
2. B : « on pioche une suite de cinq cartes consécutives, non nécessairement de la même couleur » ;
3. C : « on obtient exactement deux cœurs et un roi ».

Corrigé 4. On travaille sur $\Omega = \{A \in \mathcal{P}([\![1, 32]\!]) \mid \mathrm{Card}(A) = 5\}$.

1. On choisit les deux trèfles ($\binom{8}{2}$ possibilités), et une carte de chaque autre couleur ($\binom{8}{1} = 8$ possibilité à chaque fois). Ainsi
$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{8}{2} \times \binom{8}{1} \times \binom{8}{1} \times \binom{8}{1}}{\binom{32}{5}}.$$
2. On choisit la valeur la plus petite carte de la suite (4 possibilités), puis les valeurs des cinq cartes suivantes (1 possibilité : une fois la première valeur donnée, on n'a pas le choix des valeurs suivantes) et enfin les couleurs de chaque cartes ($\binom{4}{1} = 4$ possibilités à chaque fois). Donc
$$\mathbb{P}(B) = \frac{4 \times 4^5}{\binom{32}{5}}.$$
3. Introduisons C_0 : « on obtient deux trèfles et une dame exactement, sans la dame de trèfle » et C_1 : « on obtient deux trèfles et une dame exactement, avec la dame de trèfle », de sorte que $C = C_0 \cup C_1$ (union disjointe).
   - Dénombrement de C_0. On choisit deux cœurs non roi ($\binom{7}{2}$ possibilités), un roi non cœur ($\binom{3}{1}$ possibilités) et les deux cartes restantes, non cœurs non rois ($\binom{21}{2}$). Donc $\mathrm{Card}(C_0) = \binom{7}{2} \times \binom{3}{1} \times \binom{21}{2}$.
   - Dénombrement de C_1. On choisit le de cœur (1 possibilité), un cœur non roi ($\binom{7}{1}$ possibilités) et les trois cartes restantes, non cœurs non rois ($\binom{21}{3}$ possibilités). Donc $\mathrm{Card}(C_1) = \binom{7}{1} \times \binom{21}{3}$.

   Finalement,
$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C_0) + \mathbb{P}(C_1) = \frac{\binom{7}{2} \times \binom{3}{1} \times \binom{21}{2} + \binom{7}{1} \times \binom{21}{3}}{\binom{32}{5}}.$$