Interrogation n°20 - Sujet A

Exercice 1. Soit $P \in \mathbf{K}[X]$, $\alpha \in \mathbf{K}$ et $m \in \mathbf{N}^\star$. Définir l'assertion « α est une racine de P de multiplicité m ».

Corrigé 1. α est racine de multiplicité m de P si et seulement si $(X-\alpha)^m \mid P$ et $(X-\alpha)^{m+1}$ ne divise pas P.

Exercice 2. Enoncer le théorème de la division euclidienne dans $\mathbf{K}[X]$.

Corrigé 2. Soit $(A, B) \in \mathbf{K}[X]^2$ avec $B \neq 0$. Il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbf{K}[X]^2$ tel que $A = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$.

Exercice 3. Déterminer toutes les racines de $X^3 - 7X^2 + 14X - 8$.

Corrigé 3. On remarque que 1 est racine évidente.

$$
\begin{array}{r|l}
X^3 - 7X^2 + 14X - 8 & X - 1 \\ \cline{2-2}
-X^3 + X^2 \phantom{{}+ 14X - 8} & X^2 - 6X + 8 \\ \cline{1-1}
-6X^2 + 14X \phantom{{}- 8} & \\
6X^2 - 6X \phantom{{}- 8} & \\ \cline{1-1}
8X - 8 & \\
-8X + 8 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Ainsi $X^3 - 7X^2 + 14X - 8 = (X-1)(X^2 - 6X + 8)$. Or 2 est racine évidente de $X^2 - 6X + 8$, donc on obtient immédiatement que 4 est l'autre racine à l'aide des relations entre coefficients et racines (si on note x_1 la racine manquante, les relations coefficients/racines donnent $8 = \frac{x_1 \times 2}{1}$). Finalement on a trouvé les trois racines de ce polynôme de degré 3.

Exercice 4. Déterminer toutes les racines de $8X^5 + 4X^4 - 6X^3 - 5X^2 - X$ sachant que ce polynôme admet une racine triple.

Corrigé 4. Notons $P = 8X^5 + 4X^4 - 6X^3 - 5X^2 - X$. On remarque que 0 et 1 sont racines évidentes. On vérifie rapidement que $P'(1) \neq 0$ et $P'(0) \neq 0$. Donc ni 0 ni 1 ne sont racines triples. P est divisible par $X(X-1) = X^2 - X$:

$$
\begin{array}{r|l}
8X^5 + 4X^4 - 6X^3 - 5X^2 - X & X^2 - X \\ \cline{2-2}
-8X^5 + 8X^4 \phantom{{}- 6X^3 - 5X^2 - X} & 8X^3 + 12X^2 + 6X + 1 \\ \cline{1-1}
12X^4 - 6X^3 \phantom{{}- 5X^2 - X} & \\
-12X^4 + 12X^3 \phantom{{}- 5X^2 - X} & \\ \cline{1-1}
6X^3 - 5X^2 \phantom{{}- X} & \\
-6X^3 + 6X^2 \phantom{{}- X} & \\ \cline{1-1}
X^2 - X & \\
-X^2 + X & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Posons $Q = 8X^3 + 12X^2 + 6X + 1$. Q admet une racine triple, donc Q'' admet une racine. Or $Q'' = 48X + 24 = 24(2X+1)$. L'unique racine de Q'' étant $-\frac{1}{2}$, on obtient que c'est la racine triple cherchée (on peut vérifier que $P(-\frac{1}{2}) = P'(-\frac{1}{2}) = 0$ pour se rassurer mais l'énoncé assure que ces quantités sont nécessairement nulles). Finalement on a obtenu 5 racines comptées avec multiplicité, donc on a trouvé toutes les racines. Finalement, les racines sont 0, 1 et $-\frac{1}{2}$.

Remarque : il faut **toujours** chercher le plus de racines évidentes possibles pour ce type d'exercice avant de commencer à utiliser des méthodes plus sophistiquées. Les calculs seront de la suite seront alors plus simples.

Interrogation n°20 - Sujet B

Exercice 1. Soit $P \in \mathbf{K}[X]$, $\alpha \in \mathbf{K}$ et $m \in \mathbf{N}^\star$. Définir l'assertion « α est une racine de P de multiplicité m ».

Corrigé 1. α est racine de multiplicité m de P si et seulement si $(X-\alpha)^m \mid P$ et $(X-\alpha)^{m+1}$ ne divise pas P.

Exercice 2. Enoncer le théorème de la division euclidienne dans $\mathbf{K}[X]$.

Corrigé 2. Soit $(A,B) \in \mathbf{K}[X]^2$ avec $B \neq 0$. Il existe un unique couple $(Q,R) \in \mathbf{K}[X]^2$ tel que $A = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$.

Exercice 3. Déterminer toutes les racines de $X^3 + X^2 - 10X + 8$.

Corrigé 3. On remarque que 1 est racine évidente.

$$
\begin{array}{r|l}
X^3 \quad + X^2 - 10X + 8 & X - 1 \\
\cline{2-2}
-X^3 \quad + X^2 \qquad\qquad\quad & X^2 + 2X - 8 \\
\cline{1-1}
2X^2 - 10X \qquad & \\
-2X^2 \ \ + 2X \qquad & \\
\cline{1-1}
-8X + 8 & \\
8X - 8 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Ainsi $X^3 + X^2 - 10X + 8 = (X-1)(X^2 + 2X - 8)$. Or 2 est racine évidente de $X^2 + 2X - 8$, donc on obtient immédiatement que -4 est l'autre racine à l'aide des relations entre coefficients et racines (si on note x_1 la racine manquante, les relations coefficients/racines donnent $-8 = \frac{x_1 \times 2}{1}$). Finalement on a trouvé les trois racines de ce polynôme de degré 3.

Exercice 4. Déterminer toutes les racines de $8X^5 - 4X^4 - 6X^3 + 5X^2 - X$ sachant que ce polynôme admet une racine triple.

Corrigé 4. Notons $P = 8X^5 - 4X^4 - 6X^3 + 5X^2 - X$. On remarque que 0 et -1 sont racines évidentes. On vérifie rapidement que $P'(-1) \neq 0$ et $P'(0) \neq 0$. Donc ni 0 ni -1 ne sont racines triples. P est divisible par $X(X+1) = X^2 + X$:

$$
\begin{array}{r|l}
8X^5 \ \ - 4X^4 \ \ - 6X^3 + 5X^2 - X & X^2 + X \\
\cline{2-2}
-8X^5 \ \ - 8X^4 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad & 8X^3 - 12X^2 + 6X - 1 \\
\cline{1-1}
-12X^4 \ \ - 6X^3 \qquad\qquad\quad & \\
12X^4 + 12X^3 \qquad\qquad\quad & \\
\cline{1-1}
6X^3 + 5X^2 \qquad & \\
-6X^3 - 6X^2 \qquad & \\
\cline{1-1}
-X^2 - X & \\
X^2 + X & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Posons $Q = 8X^3 - 12X^2 + 6X - 1$. Q admet une racine triple, donc Q'' admet une racine. Or $Q'' = 48X - 24 = 24(2X-1)$. L'unique racine de Q'' étant $\frac{1}{2}$, on obtient que c'est la racine triple cherchée (on peut vérifier que $P(\frac{1}{2}) = P'(-\frac{1}{2}) = 0$ pour se rassurer mais l'énoncé assure que ces quantités sont nécessairement nulles). Finalement on a obtenu 5 racines comptées avec multiplicité, donc on a trouvé toutes les racines. Finalement, les racines sont 0, -1 et $\frac{1}{2}$.

Remarque : il faut **toujours** chercher le plus de racines évidentes possibles pour ce type d'exercice avant de commencer à utiliser des méthodes plus sophistiquées. Les calculs seront de la suite seront alors plus simples.