Interrogation n°21 - Sujet A

Exercice 1. Rappeler la définition de variable aléatoire.

Corrigé 1. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Une variable aléatoire sur Ω est une application définie sur Ω et à valeur dans un ensemble E.

Exercice 2. Soit $X \hookrightarrow \mathscr{B}(20, \frac{2}{3})$. Donner $\mathbb{P}(X=2)$, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Corrigé 2. $\mathbb{P}(X=2) = \binom{20}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^{17} = \frac{20\times 19}{2} \times \frac{8}{3^{20}} = \frac{190\times 8}{3^{20}} = \frac{1520}{3^{20}}$. De plus, $\mathbb{E}(X) = 20 \times \frac{2}{3} = \frac{40}{3}$ et $\mathbb{V}(X) = 20 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{40}{9}$.

Exercice 3. Soit $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket -2, 2 \rrbracket$. Déterminer la loi de X^2.

Corrigé 3. Si Ω est l'univers de l'expérience aléatoire, on a $X(\Omega) = \llbracket -2 \rrbracket 2$ et

x	-2	-1	0	1	2
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

Notons $Y = X^2$. On a $Y(\Omega) = \{0, 1, 4\}$. De plus, $(Y=0) = (X=0)$ d'où $\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(X=0)$. Par ailleurs, $(Y=1) = (X=1) \cup (X=-1)$ (l'union étant disjointe) d'où $\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(X=-1) + \mathbb{P}(X=1)$. De même, $\mathbb{P}(Y=4) = \mathbb{P}(X=-2) + \mathbb{P}(X=2)$. Finalement,

x	0	1	4
$\mathbb{P}(Y=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

Exercice 4.

1. Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Lors d'une saison de football, le nombre moyen de buts par match est de $2,5$ avec une variance de $1,1$. Majorer la probabilité que le matche suivant ne se termine pas avec deux ou trois buts.

Corrigé 4.

1. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini.
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$
2. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de buts. On cherche ici $\mathbb{P}(X \leqslant 1 \text{ ou } X \geqslant 4)$, *i.e.* $|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant 1,5$ (puisque $\mathbb{E}(X) = 2,5$). Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,
$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant 1,5) \leqslant \frac{1,1}{1,5^2}.$$
Complément : on a $\frac{1,1}{1,5^2} < 0,49$.