Interrogation n°22 - Sujet A

Exercice 1. Soit $X \hookrightarrow \mathscr{B}(10, \frac{1}{3})$. Donner $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Corrigé 1. On a $\mathbb{E}(X) = \frac{10}{3}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{20}{9}$.

Exercice 2. Soit $(a, b, n) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{N}^\star$ avec $a < b$. Soit $f \in \mathscr{C}^0([a\,;\,b]\,, \mathbf{R})$.

1. Définir la somme de Riemann à gauche d'ordre n associée à f sur $[a\,;\,b]$.
2. Donner le théorème de convergence des sommes de Riemann à gauche.

Corrigé 2.

1. La somme voulue est $R_n(f) = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$.
2. On a $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} R_n(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3. Enoncer la formule de Taylor avec reste intégral.

Corrigé 3. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Soit $n \in \mathbf{N}$, $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbf{R})$, soit $a \in I$. Alors, pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 4.

1. Donner le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \longmapsto \mathrm{sh}(x)$.
2. Donner le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \longmapsto \exp(2x)$.
3. Donner le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$.

Corrigé 4.

1. On a $\mathrm{sh}(x) \underset{x \to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{6} + \mathrm{o}\big(x^3\big)$.
2. On a $\exp(2x) \underset{x \to 0}{=} 1 + 2x + \dfrac{(2x)^2}{2} + \dfrac{(2x)^3}{3!} + \mathrm{o}\big(x^3\big) \underset{x \to 0}{=} 1 + 2x + 2x^2 + \dfrac{4x^3}{3} + \mathrm{o}\big(x^3\big)$.
3. On a $\dfrac{1}{\cos(x)} \underset{x \to 0}{=} \dfrac{1}{1 - \dfrac{x^2}{2}} + \mathrm{o}\big(x^3\big) \underset{x \to 0}{=} 1 + \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}\big(x^3\big)$.

Interrogation n°22 - Sujet B

Exercice 1. Soit $X \hookrightarrow \mathscr{B}(10, \frac{2}{3})$. Donner $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Corrigé 1. On a $\mathbb{E}(X) = \frac{20}{3}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{20}{9}$.

Exercice 2. Soit $(a, b, n) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{N}^\star$ avec $a < b$. Soit $f \in \mathscr{C}^0([a\,;\,b]\,,\mathbf{R})$.

1. Définir la somme de Riemann à gauche d'ordre n associée à f sur $[a\,;\,b]$.
2. Donner le théorème de convergence des sommes de Riemann à gauche.

Corrigé 2.

1. La somme voulue est $R_n(f) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$.
2. On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3. Enoncer la formule de Taylor avec reste intégral.

Corrigé 3. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Soit $n \in \mathbf{N}$, $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbf{R})$, soit $a \in I$. Alors, pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 4.

1. Donner le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \longmapsto \sin(x)$.
2. Donner le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \longmapsto \exp(2x)$.
3. Donner le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}$.

Corrigé 4.

1. On a $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)$.
2. On a $\exp(2x) \underset{x\to 0}{=} 1 + 2x + \dfrac{(2x)^2}{2} + \dfrac{(2x)^3}{3!} + \mathrm{o}(x^3) \underset{x\to 0}{=} 1 + 2x + 2x^2 + \dfrac{4x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)$.
3. On a $\dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{1 + \dfrac{x^2}{2}} + \mathrm{o}(x^3) \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^3)$.