Interrogation n°23 - Sujet A

Exercice 1. On considère
$$F = \{\, P \in \mathbf{R}[X] \mid P(0) = P(2) \,\}.$$
F est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$?

Corrigé 1.

- On a $F \subset \mathbf{R}[X]$.
- Notons Θ le polynôme nul. On a $\Theta(0) = 0 = \Theta(2)$, donc $\Theta \in F$.
- Soit $(\lambda, P, Q) \in \mathbf{R} \times F^2$.
$$(\lambda P + Q)(0) = \lambda P(0) + Q(0) = \lambda P(2) + Q(2) = (\lambda P + Q)(2)$$
donc $\lambda P + Q \in F$.

Finalement, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 2. Démontrer qu'il existe $a \in \mathbf{R}^3$ tel que
$$\left\{\, (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x - 2y + 3z = 0 \text{ et } x = 0 \right\} = \mathrm{Vect}\,(a).$$

Corrigé 2. Notons $F = \left\{\, (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x - 2y + 3z = 0 \text{ et } x = 0 \right\}$. Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.
$$(x,y,z) \in F \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x + 3y - 5z & = & 0 \\ x & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & \frac{3}{2}z \\ x & = & 0 \end{array} \right. \iff (x,y,z) \in \left\{ \left(0, \frac{3}{2}z, z\right) \;:\; z \in \mathbf{R} \right\}$$
donc $F = \mathrm{Vect}\,((0, 3, 2))$.

Exercice 3. On se place dans $\mathbf{R}^2$ et on considère $F = \mathrm{Vect}\,((1, 1))$, $G = \mathrm{Vect}\,((2, 1))$.

1. Déterminer une équation cartésienne de G.
2. Montrer que F et G sont en somme directe.

Corrigé 3.

1. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.
$$(x,y) \in G \iff \exists (a,b) \in \mathbf{R}^2,\ (x,y) = (2a, a) \iff \exists (a,b) \in \mathbf{R}^2,\ \left\{ \begin{array}{rcl} 2a & = & x \\ a & = & y \end{array} \right. \iff \exists (a,b) \in \mathbf{R}^2,\ \left\{ \begin{array}{rcl} 0 & = & x - 2y \\ a & = & y \end{array} \right.$$
donc une équation cartésienne de G est $x - 2y = 0$.
2. Soit $(x, y) \in F \cap G$. Puisque $(x, y) \in F$, il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $(x, y) = (a, a)$. De plus, $(x, y) \in G$, donc $x - 2y = 0$, puis $a - 2a = 0$ et ainsi $a = 0$. Donc $(x, y) = (0, 0)$. On vient de montrer que $F \cap G \subset \{0\}$. L'autre inclusion étant triviale, on en déduit que $F \cap G = \{0\}$. Finalement, F et G sont en somme directe.

Interrogation n°23 - Sujet B

Exercice 1. On considère
$$F = \{ P \in \mathbf{R}[X] \mid P(0) = P(3) \} .$$
F est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$?

Corrigé 1.
- On a $F \subset \mathbf{R}[X]$.
- Notons Θ le polynôme nul. On a $\Theta(0) = 0 = \Theta(3)$, donc $\Theta \in F$.
- Soit $(\lambda, P, Q) \in \mathbf{R} \times F^2$.
$$(\lambda P + Q)(0) = \lambda P(0) + Q(0) = \lambda P(3) + Q(3) = (\lambda P + Q)(3)$$
donc $\lambda P + Q \in F$.

Finalement, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 2. Démontrer qu'il existe $a \in \mathbf{R}^3$ tel que
$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, x + 3y - 5z = 0 \text{ et } x = 0 \right\} = \mathrm{Vect}\,(a) .$$

Corrigé 2. Notons $F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,\middle|\, x - 2y + 3z = 0 \text{ et } x = 0 \right\}$. Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.
$$(x, y, z) \in F \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x + 3y - 5z & = & 0 \\ x & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & \frac{5}{3}z \\ x & = & 0 \end{array} \right. \iff (x, y, z) \in \left\{ \left(0, \frac{5}{3}z, z\right) \;:\; z \in \mathbf{R} \right\}$$
donc $F = \mathrm{Vect}\,((0, 5, 3))$.

Exercice 3. On se place dans $\mathbf{R}^2$ et on considère $F = \mathrm{Vect}\,((2, 2))$, $G = \mathrm{Vect}\,((3, 1))$.
1. Déterminer une équation cartésienne de G.
2. Montrer que F et G sont en somme directe.

Corrigé 3.
1. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.
$$(x, y) \in G \iff \exists (a, b) \in \mathbf{R}^2,\ (x, y) = (3a, a) \iff \exists (a, b) \in \mathbf{R}^2,\ \left\{ \begin{array}{rcl} 3a & = & x \\ a & = & y \end{array} \right. \iff \exists (a, b) \in \mathbf{R}^2,\ \left\{ \begin{array}{rcl} 0 & = & x - 3y \\ a & = & y \end{array} \right.$$
donc une équation cartésienne de G est $x - 3y = 0$.
2. Soit $(x, y) \in F \cap G$. Puisque $(x, y) \in F$, il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $(x, y) = (2a, 2a)$. De plus, $(x, y) \in G$, donc $x - 3y = 0$, puis $2a - 6a = 0$ et ainsi $a = 0$. Donc $(x, y) = (0, 0)$. On vient de montrer que $F \cap G \subset \{0\}$. L'autre inclusion étant triviale, on en déduit que $F \cap G = \{0\}$. Finalement, F et G sont en somme directe.