Interrogation n°24 - Sujet A

Exercice 1. Définir les notions d'endomorphisme, d'isomorphisme et d'automorphisme d'espace vectoriel.

Corrigé 1.
- Un endomorphisme est une application linéaire d'un espace vectoriel dans lui-même.
- Un isomorphisme est une application linéaire bijective.
- Un automorphisme est une application linéaire bijective d'un espace vectoriel dans lui-même.

Exercice 2. On considère

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbf{C}[X] & \longrightarrow & \mathbf{C}[X] \\ P & \longmapsto & (1-2X)P + X^2P' \end{array}$$

Démontrer que f est une application $\mathbf{C}$-linéaire.

Corrigé 2. Soit $(\lambda, P, Q) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}[X]^2$. On a

$$f(\lambda P + Q) = (1-2X)(\lambda P + Q) + X^2(\lambda P + Q) = \lambda(1-2X)\lambda P + X^2\lambda P' + (1-2X)Q + X^2Q' = \lambda f(P) + f(Q).$$

Donc f est $\mathbf{C}$-linéaire.

Exercice 3. On considère

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y, x+y) \end{array}$$

On admet que f est linéaire.

1. Déterminer le noyau de f sous la forme d'un espace vectoriel engendré.
2. Déterminer, si possible, une ou plusieurs équations cartésiennes de $\mathrm{Im}(f)$.
3. L'application f est-elle injective ? surjective ?

Corrigé 3.

1. Soit $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

$$(x,y) \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(x,y) = 0 \iff \left\{ \begin{array}{ccc} x+y & = & 0 \\ x-y & = & 0 \\ x+y & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccc} x+y & = & 0 \\ 2x & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array} \right.$$

donc $\mathrm{Ker}(f) = \{(0,0)\}$.

2. Soit $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$.

$$(a,b,c) \in \mathrm{Im}(f) \iff \exists (x,y) \in \mathbf{R}^2, \left\{ \begin{array}{ccc} x+y & = & a \\ x-y & = & b \\ x+y & = & c \end{array} \right. \iff \exists (x,y) \in \mathbf{R}^2, \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & \frac{a+b}{2} \\ y & = & \frac{a-b}{2} \\ 0 & = & c-a \end{array} \right.$$

donc une équation cartésienne de $\mathrm{Im}(f)$ est $c - a = 0$ (autrement dit, $\mathrm{Im}(f) = \left\{ (a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \mid c - a = 0 \right\}$.

3. Puisque $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, f est injective. Puisque $\mathrm{Im}(f) \neq \mathbf{R}^3$ (par exemple, $(1,1,0)$ ne respecte pas l'équation cartésienne obtenue à la question 2, donc $(1,1,0) \notin \mathrm{Im}(f)$), f n'est pas surjective.

Interrogation n°24 - Sujet B

Exercice 1. Définir les notions d'endomorphisme, d'isomorphisme et d'automorphisme d'espace vectoriel.

Corrigé 1.
- Un endomorphisme est une application linéaire d'un espace vectoriel dans lui-même.
- Un isomorphisme est une application linéaire bijective.
- Un automorphisme est une application linéaire bijective d'un espace vectoriel dans lui-même.

Exercice 2. On considère

$$f:\begin{array}{rcl} \mathbf{C}[X] & \longrightarrow & \mathbf{C}[X] \\ P & \longmapsto & (1-2X)P+X^2P' \end{array}$$

Démontrer que f est une application $\mathbf{C}$-linéaire.

Corrigé 2. Soit $(\lambda, P, Q) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}[X]^2$. On a

$$f(\lambda P+Q)=(1-2X)(\lambda P+Q)+X^2(\lambda P+Q)=\lambda(1-2X)\lambda P+X^2\lambda P'+(1-2X)Q+X^2Q'=\lambda f(P)+f(Q).$$

Donc f est $\mathbf{C}$-linéaire.

Exercice 3. On considère

$$f:\begin{array}{rcl} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,x-y,x+y) \end{array}$$

On admet que f est linéaire.

1. Déterminer le noyau de f sous la forme d'un espace vectoriel engendré.
2. Déterminer, si possible, une ou plusieurs équations cartésiennes de $\mathrm{Im}(f)$.
3. L'application f est-elle injective ? surjective ?

Corrigé 3.

1. Soit $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

$$(x,y)\in\mathrm{Ker}(f) \iff f(x,y)=0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 0 \\ x-y & = & 0 \\ x+y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 0 \\ 2x & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array}\right.$$

   donc $\mathrm{Ker}(f)=\{(0,0)\}$.
2. Soit $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$.

$$(a,b,c)\in\mathrm{Im}(f) \iff \exists(x,y)\in\mathbf{R}^2, \left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & a \\ x-y & = & b \\ x+y & = & c \end{array}\right. \iff \exists(x,y)\in\mathbf{R}^2, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{a+b}{2} \\ y & = & \frac{a-b}{2} \\ 0 & = & c-a \end{array}\right.$$

   donc une équation cartésienne de $\mathrm{Im}(f)$ est $c-a=0$ (autrement dit, $\mathrm{Im}(f)=\left\{(a,b,c)\in\mathbf{R}^3 \,\middle|\, c-a=0\right\}$.
3. Puisque $\mathrm{Ker}(f)=\{0\}$, f est injective. Puisque $\mathrm{Im}(f)\neq\mathbf{R}^3$ (par exemple, $(1,1,0)$ ne respecte pas l'équation cartésienne obtenue à la question 2, donc $(1,1,0)\notin\mathrm{Im}(f)$), f n'est pas surjective.