Interrogation n°25 - Sujet A

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel, E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. On note p la projection sur E_1 parallèlement à E_2 et s la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2. Donner une égalité reliant p et s.

Corrigé 1. $s = 2p - \mathrm{Id}_E$.

Exercice 2. On considère

$$p : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y,0) \end{array}$$

On admet que p est un endomorphisme. Montrer que p est un projecteur et préciser ses éléments caractéristiques (on précisera le sous-espace vectoriel sur lequel la projection est réalisée ainsi que le sous-espace vectoriel directeur de la projection).

Corrigé 2. Soit $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. On a

$$p(p(x,y)) = p(x-y,0) = (x-y,0) = p(x,y)$$

donc $p \circ p = p$ et p est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^2})$.

Détermination de $\mathrm{Ker}(p)$.

Soit $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. On a

$$(x,y) \in \mathrm{Ker}(p) \iff p(x,y) = 0 \iff (x-y,0) = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$$

donc $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Vect}\left((1,1)\right)$.

Détermination de $\mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^2})$.

Soit $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. On a

$$(x,y) \in \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^2}) \iff p(x,y) = (x,y) \iff (x-y,0) = (x,y) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x-y & = & x \\ 0 & = & y \end{array} \right. \iff y = 0$$

donc $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Vect}\left((1,0)\right)$.

Exercice 3. On se place dans $\mathbf{R}_2[X]$ et on considère la famille

$$\mathcal{F} = (X^2 + 2X + 2, X^2 + 3, 2)$$

Montrer que $\mathcal{F}$ est une famille libre de $\mathbf{R}_2[X]$.

Corrigé 3. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{R}^3$ tel que $\lambda_1(X^2+2X+2) + \lambda_2(X^2+3) + 2\lambda_3 = 0$. Par identification des coefficients de polynômes, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & = & 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Or l'unique solution de système est $(0,0,0)$, donc la famille $\mathcal{F}$ est libre.

Interrogation n°25 - Sujet B

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel, E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. On note p la projection sur E_1 parallèlement à E_2 et s la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2. Donner une égalité reliant p et s.

Corrigé 1. $s = 2p - \mathrm{Id}_E$.

Exercice 2. On considère

$$p: \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (0,-x+y) \end{array}$$

On admet que p est un endomorphisme. Montrer que p est un projecteur et préciser ses éléments caractéristiques (on précisera le sous-espace vectoriel sur lequel la projection est réalisée ainsi que le sous-espace vectoriel directeur de la projection).

Corrigé 2. Soit $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. On a

$$p(p(x,y)) = p(0,-x+y) = (0,-x+y) = p(x,y)$$

donc $p \circ p = p$ et p est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^2})$.

<u>Détermination de $\mathrm{Ker}(p)$.</u>

Soit $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. On a

$$(x,y) \in \mathrm{Ker}(p) \iff p(x,y) = 0 \iff (0,-x+y) = 0 \iff -x+y = 0 \iff x = y$$

donc $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Vect}\left((1,1)\right)$.

<u>Détermination de $\mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^2})$.</u>

Soit $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. On a

$$(x,y) \in \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^2}) \iff p(x,y) = (x,y) \iff (0,-x+y) = (x,y) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ -x+y & = & y \end{array} \right. \iff x = 0$$

donc $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Vect}\left((0,1)\right)$.

Exercice 3. On se place dans $\mathbf{R}_2[X]$ et on considère la famille

$$\mathcal{F} = (X^2+4X+1, X^2+4, 1)$$

Montrer que $\mathcal{F}$ est une famille libre de $\mathbf{R}_2[X]$.

Corrigé 3. Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbf{R}^3$ tel que $\lambda_1(X^2+4X+1) + \lambda_2(X^2+4) + \lambda_3 = 0$. Par identification des coefficients de polynômes, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1+\lambda_2 & = & 0 \\ 4\lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_1+4\lambda_2+\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Or l'unique solution de système est $(0,0,0)$, donc la famille $\mathcal{F}$ est libre.