Interrogation n°26 - Sujet A

Exercice 1. Enoncer la formule de Grassmann.

Corrigé 1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On a

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Exercice 2. Enoncer le théorème du rang.

Corrigé 2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un espace vectoriel quelconque. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(E).$$

Exercice 3. Compléter, si possible, la famille $\mathcal{F} = (X^2+X+1, X^2+2X+1)$ en une base de $\mathbf{R}_2[X]$.

Corrigé 3. On a, en notant $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc on (X^2+X+1, X^2+2X+1, X^2) est une base de $\mathbf{R}_2[X]$.

Exercice 4. Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ suivant :

$$F = \mathrm{Vect}\left((1,1,1),(2,-2,2),(1,9,1)\right)$$

Corrigé 4. On a, en notant $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et $\mathcal{F} = ((1,1,1),(2,-2,2),(1,9,1))$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 9 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{-4} & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $(1,9,1) \in \mathrm{Vect}\left((1,1,1),(2,-2,2)\right)$, puis $F = \mathrm{Vect}\left((1,1,1),(2,-2,2)\right)$. Or $((1,1,1),(2,-2,2))$ est une famille de deux vecteurs non colinéaires, donc c'est une famille libre. Ainsi c'est une base de F et $\dim(F) = 2$.

Interrogation n°26 - Sujet B

Exercice 1. Enoncer le théorème du rang.

Corrigé 1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un espace vectoriel quelconque. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(E).$$

Exercice 2. Enoncer la formule de Grassmann.

Corrigé 2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On a

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Exercice 3. Compléter, si possible, la famille $\mathcal{F} = (X^2 + X + 1, X^2 + 3X + 1)$ en une base de $\mathbf{R}_2[X]$.

Corrigé 3. On a, en notant $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 \\ 0 & \boxed{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc on $(X^2 + X + 1, X^2 + 3X + 1, X^2)$ est une base de $\mathbf{R}_2[X]$.

Exercice 4. Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ suivant :

$$F = \mathrm{Vect}\left((1,1,1), (-2,2,2), (9,1,1)\right)$$

Corrigé 4. On a, en notant $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et $\mathcal{F} = ((1,1,1), (2,-2,2), (9,1,1))$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 9 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 9 \\ 0 & \boxed{4} & -8 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 9 \\ 0 & \boxed{4} & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $(9,1,1) \in \mathrm{Vect}\left((1,1,1), (-2,2,2)\right)$, puis $F = \mathrm{Vect}\left((1,1,1), (-2,2,2)\right)$. Or $((1,1,1), (-2,2,2))$ est une famille de deux vecteurs non colinéaires, donc c'est une famille libre. Ainsi c'est une base de F et $\dim(F) = 2$.