Interrogation n°27 - Sujet A

Exercice 1. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Soit $\mathcal{B}' = ((1,1,1),(1,0,1),(1,0,0))$. On admet que $\mathcal{B}'$ est une base. Déterminer $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ et $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$.

Corrigé 1. On a

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et, après calculs,

$$P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Notons $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ deux bases de F. Donner la formule de changement de bases qui lie $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$.

Corrigé 2. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u) = P_{\mathcal{C}'\to\mathcal{C}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$.

Exercice 3. On considère

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, x-y, 2x+z) \end{array}$$

On donne $f(1,1,-2) = 0$.

1. Justifier que $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant 2$.
2. Déterminer sans calculs (ou presque !) une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Corrigé 3.

1. On a $(1,1,-2) \in \mathrm{Ker}(f)$, donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \geqslant 1$. Le théorème du rang assure alors que $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant 2$.
2. On a $f(1,0,0) = (1,1,2)$ et $f(0,1,0) = (1,-1,0)$ qui forment une famille libre de $\mathrm{Im}(f)$. Ainsi $\dim(\mathrm{Im}(f)) \geqslant 2$, puis avec la question précédente $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$. En tant que famille libre de deux vecteurs, $((1,1,2),(1,-1,0))$ est ainsi une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Interrogation n°27 - Sujet B

Exercice 1. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Soit $\mathcal{B}' = ((1,1,1),(1,0,1),(1,0,0))$. On admet que $\mathcal{B}'$ est une base. Déterminer $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ et $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$.

Corrigé 1. On a

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et, après calculs,

$$P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Notons $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ deux bases de F. Donner la formule de changement de bases qui lie $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$.

Corrigé 2. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u) = P_{\mathcal{C}'\to\mathcal{C}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$.

Exercice 3. On considère

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, x-y, 2x+z) \end{array}$$

On donne $f(1,1,-2) = 0$.

1. Justifier que $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant 2$.
2. Déterminer sans calculs (ou presque !) une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Corrigé 3.
1. On a $(1,1,-2) \in \mathrm{Ker}(f)$, donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \geqslant 1$. Le théorème du rang assure alors que $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant 2$.
2. On a $f(1,0,0) = (1,1,2)$ et $f(0,1,0) = (1,-1,0)$ qui forment une famille libre de $\mathrm{Im}(f)$. Ainsi $\dim(\mathrm{Im}(f)) \geqslant 2$, puis avec la question précédente $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$. En tant que famille libre de deux vecteurs, $((1,1,2),(1,-1,0))$ est ainsi une base de $\mathrm{Im}(f)$.