Interrogation n°27 - Sujet A

Exercice 1. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Soit $\mathcal{B}' = ((1,1,1),(1,0,1),(1,0,0))$. On admet que $\mathcal{B}'$ est une base. Déterminer $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ et $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$.

Exercice 2. Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Notons $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ deux bases de F. Donner la formule de changement de bases qui lie $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$.

Exercice 3. On considère

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, x-y, 2x+z) \end{array}$$

On donne $f(1,1,-2) = 0$.

1. Justifier que $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant 2$.

2. Déterminer sans calculs (ou presque !) une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Interrogation n°27 - Sujet B

Exercice 1. Enoncer le théorème du rang.

Exercice 2. Enoncer la formule de Grassmann.

Exercice 3. Compléter, si possible, la famille $\mathcal{F} = (X^2 + X + 1, X^2 + 3X + 1)$ en une base de $\mathbf{R}_2[X]$.

Exercice 4. Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ suivant :

$$F = \mathrm{Vect}\left((1, 1, 1), (-2, 2, 2), (9, 1, 1)\right)$$