
Savez-vous faire ?

Le principe de récurrence

Vous devez savoir mener des raisonnements par récurrence (simple, double, triple ou forte), et les rédiger précisément.

SVF 1. On considère la suite u définie par la donnée de son premier terme $u_0 = -4$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = 5u_n - 4.$$

Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$u_n = -5^{n+1} + 1.$$

SVF 2. On considère la suite u définie par la donnée de ses premiers termes $u_0 = 3$, $u_1 = 5$, et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 12u_n.$$

Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 2 \times 4^n + (-3)^n.$$

SVF 3. Soit $a \in [-1; 1]$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par la donnée de son premier terme $u_0 = a$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = u_n^2 - 1.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n \in [-1; 0]$.

SVF 4. On considère la suite u définie par son premier terme $u_1 = \frac{1}{2}$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Trouver une formule exprimant le terme général u_n en fonction de $n \in \mathbf{N}$, puis la démontrer par récurrence.

SVF 5. On considère la suite u définie par la donnée de ses premiers termes $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n < \left(\frac{5}{3}\right)^n$.

SVF 6. Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

SVF 7. Notons f la fonction définie sur $\mathbf{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. Calculer f' , f'' (la dérivée seconde de f'), $f^{(3)}$ (lire « dérivée troisième de f » : c'est la dérivée de f'') et $f^{(4)}$ (lire « dérivée quatrième de f » : c'est la dérivée de $f^{(3)}$). Trouver une conjecture exprimant la dérivée n -ième de f , notée $f^{(n)}$, en fonction de $n \in \mathbf{N}$ (on convient que $f^{(0)} = f$). Démontrer ce résultat.

SVF 8. Soit $a \in \mathbf{N}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n k(k+1) \cdots (k+a) = \frac{n(n+1) \cdots (n+a+1)}{a+2}.$$

Éléments de correction

Éléments de correction - SVF 1

Pour tout entier naturel n , on introduit l'hypothèse H_n : « $u_n = -5^{n+1} + 1$ ».

L'assertion H_0 est vraie car $u_0 = -4$ et $-5^{0+1} + 1 = -4$.

Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que H_n soit vraie. On a

$$u_{n+1} = 5u_n - 4 = 5(-5^{n+1} + 1) - 4 = -5^{n+2} + 5 - 4 = -5^{n+2} + 1.$$

Par conséquent, l'assertion H_{n+1} est vraie.

Finalement, le principe de récurrence permet de conclure : H_n est vraie pour tout entier naturel n .

Éléments de correction - SVF 2

Ici, pour calculer un terme de la suite, on a besoin des deux termes précédents. Il faut donc mener une récurrence double.

Pour tout entier naturel n , on introduit l'hypothèse H_n : « $u_n = 2 \times 4^n + (-3)^n$ ».

On vérifie que les assertions H_0 et H_1 sont vraies (à faire).

Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que H_n et H_{n+1} soient vraies. On sait alors que $u_n = 2 \times 4^n + (-3)^n$ et que $u_{n+1} = 2 \times 4^{n+1} + (-3)^{n+1}$.

Or $u_{n+2} = u_{n+1} + 12u_n$, donc

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 2 \times 4^{n+1} + (-3)^{n+1} + 4 \times 3(2 \times 4^n + (-3)^n) \\ &= 2 \times 4^{n+1}(1 + 3) + (-3)^{n+1}(1 - 4) \\ &= 2 \times 4^{n+2} + (-3)^{n+2}. \end{aligned}$$

Donc H_{n+2} est vraie.

Finalement, le principe de récurrence assure que l'assertion H_n est vraie pour tout entier naturel n .

Éléments de correction - SVF 3

Il faut faire attention ici : l'initialisation est à faire au rang 1.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, posons H_n : « $u_n \in [-1; 0]$ ».

Puisque $u_0 \in [-1; 1]$, $u_0^2 \in [0; 1]$, puis $u_1 \in [-1; 0]$, donc H_1 est vraie.

Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que H_n soit vraie. En raisonnant comme pour l'initialisation, on a : $u_n \in [-1; 1]$, donc $u_n^2 \in [0; 1]$ puis $u_{n+1} \in [-1; 0]$, donc H_{n+1} est vraie.

Le raisonnement par récurrence permet de conclure : H_n est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Éléments de correction - SVF 4

Calculons les premiers termes de cette suite afin de conjecturer une formule pour l'expression de son terme général.

On a :

$$u_1 = \frac{1}{2}, \quad u_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}, \quad u_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}, \dots$$

On conjecture donc que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = \frac{n}{n+1}.$$

On démontre ensuite cette assertion par une récurrence simple.

Éléments de correction - SVF 5

Pour tout entier naturel n non nul, on introduit H_n : « $u_n < \left(\frac{5}{3}\right)^n$ ».

H_1 et H_2 sont vraies car d'une part $u_1 = 1$ et $\left(\frac{5}{3}\right)^1 > 1$, puis d'autre part $u_2 = u_0 + u_1 = 2$ et $\left(\frac{5}{3}\right)^2 > 2$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que H_n et H_{n+1} soient vraies. On sait alors que $u_n < \left(\frac{5}{3}\right)^n$ et $u_{n+1} < \left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}$. Or $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, donc

$$u_{n+2} < \left(\frac{5}{3}\right)^n + \left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}.$$

De plus,

$$\left(\frac{5}{3}\right)^n + \left(\frac{5}{3}\right)^{n+1} = \left(\frac{5}{3}\right)^n \left(1 + \frac{5}{3}\right) = \frac{8}{3} \left(\frac{5}{3}\right)^n.$$

Or $\frac{8}{3} > (\frac{5}{3})^2$ car $8 \times 9 > 25 \times 3$. On en déduit que

$$u_{n+2} < \left(\frac{5}{3}\right)^{n+2},$$

puis que H_{n+2} est vraie.

Finalement, le principe de récurrence permet de conclure : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n < (\frac{5}{3})^n$.

Éléments de correction - SVF 6

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $H_n : \ll \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \gg$.

H_1 est vraie car la somme vaut $\frac{1}{2}$ et $2 - \frac{1+2}{2} = \frac{1}{2}$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que H_n soit vraie. On a :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}},$$

d'où, avec H_n ,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2n+4-n-1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}.$$

Ainsi H_{n+1} est vraie.

Le principe de récurrence permet de conclure : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, H_n est vraie.

Éléments de correction - SVF 7

f est indéfiniment dérivable, et

$$f' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}, \quad f'' : x \mapsto \frac{2}{x^3}, \quad f^{(3)} : x \mapsto -\frac{3 \times 2}{x^4}, \quad f^{(4)} : x \mapsto \frac{4 \times 3 \times 2}{x^5}.$$

On pose alors, pour tout entier naturel n non nul, $H_n : \ll f^{(n)} : x \mapsto (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} \gg$.

H_0 est vraie. Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que H_n soit vraie. $f^{(n)}$ donnée par H_n est dérivable et, pour tout $x \in \mathbf{R}^*$,

$$\left(f^{(n)}\right)'(x) = (-1)^n \times n! \times \frac{-(n+1)}{x^{n+2}} = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}.$$

Ainsi, on a établi que H_{n+1} est vraie.

Le principe de récurrence permet alors de conclure que H_n est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Éléments de correction - SVF 8

Pour tout entier naturel n non nul, on introduit l'assertion H_n :

$$\ll \sum_{k=1}^n k(k+1) \cdots (k+a) = \frac{n(n+1) \cdots (n+a+1)}{a+2} \gg$$

L'assertion H_1 est vraie car

$$\sum_{k=1}^1 k(k+1) \cdots (k+a) = 1 \times 2 \times \cdots (1+a) = (1+a)!$$

et

$$\frac{1(1+1) \cdots (1+a+1)}{a+2} = 1 \times 2 \times \cdots (1+a) = (1+a)!.$$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que H_n soit vraie.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) \cdots (k+a) = \sum_{k=1}^n k(k+1) \cdots (k+a) + (n+1)(n+2) \cdots (n+1+a),$$

d'où, en utilisant H_n ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) \cdots (k+a) &= \frac{n(n+1) \cdots (n+a+1)}{a+2} + (n+1)(n+2) \cdots (n+1+a) \\ &= \frac{n(n+1) \cdots (n+a+1)}{a+2} + \frac{(n+1)(n+2) \cdots (n+1+a) \times (a+2)}{(n+1)(n+2) \cdots (n+1+a) \times (n+a+2)} \\ &= \frac{(n+1)(n+2) \cdots (n+1+a) \times (n+a+2)}{a+2} \end{aligned}$$

ce qui prouve que H_{n+1} est vraie.

Le principe de récurrence assure finalement que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, H_n est vraie.