Savez-vous faire ?

Formules usuelles

Vous devez connaître et savoir utiliser à bon escient les formules usuelles suivantes : somme des n premiers entiers, formule de la série géométrique, formule du binôme de Newton.

Vous devez également être capable d'effectuer un changement d'indice, d'ajouter ou d'enlever des termes d'une somme afin de vous ramener à l'une des formules usuelles précédemment énoncées.

SVF 9. 1. Énoncer la formule du binôme de Newton.

2. Expliciter cette formule pour développer $(a-2b)^5$.
3. Dans le développement de l'expression $(3x+y)^9$, quel est le terme en x^5y^4 ?

SVF 10. Soit $(n,)q \in \mathbf{N} \times \mathbf{C}\backslash\{1\}$. Énoncer la formule donnant la somme des q^k, pour k variant de 0 à n. Utiliser cette formule pour simplifier les expressions suivantes :

$$A = \sum_{k=0}^{23} \frac{1}{2^k} \qquad \text{et} \qquad B = \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{3^{2k}}$$

SVF 11. Soit $n \in \mathbf{N}$. Énoncer la formule donnant la somme des n premiers entiers naturels. En déduire :

$$\sum_{k=0}^{15} (4k+3).$$

SVF 12. Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer :

$$A = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k.$$

En déduire la valeur de

$$B = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k.$$

SVF 13. Soit n un entier naturel. Compléter les égalités suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k} + \cdots, \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{\ell=1}^{\cdots} \frac{1}{\ell}, \qquad \sum_{k=1}^{(n+1)^2} k^3 = \sum_{k=1}^{n^2} k^3 + \sum_{k=\cdots}^{\cdots} k^3, \qquad \sum_{k=2}^{n+2} \mathrm{e}^k = \sum_{\ell=0}^{n} \mathrm{e}^{\cdots}.$$

SVF 14. Soit n un entier naturel. Simplifier l'expression

$$\sum_{k=2}^{n+2} \mathrm{e}^k.$$

Éléments de correction

Éléments de correction - SVF 9

1. Pour tous nombres complexes a et b, pour tout entier naturel n,
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$
2. On calcule les coefficients binomiaux $\binom{5}{k}$ (où $k \in [\![0,5]\!]$) à l'aide du triangle de Pascal. On obtient alors :
$$\begin{aligned}(a-2b)^5 &= a^5 + 5a^4(-2b)^1 + 10a^3(-2b)^2 + 10a^2(-2b)^3 + 5a^1(-2b)^4 + (-2b)^5 \\ &= a^5 - 10a^4b + 40a^3b^2 - 80a^2b^3 + 80ab^4 - 32b^5.\end{aligned}$$
3. Le terme cherché est $\binom{9}{5}(3x)^5y^4$. Or,
$$\binom{9}{5} = \frac{9!}{5!4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2} = 14 \times 9 = 126.$$
Ce terme est donc $126 \times 243x^5y^3$.

Éléments de correction - SVF 10

Pour a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. En particulier,
$$A = \sum_{k=0}^{23} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-(\frac{1}{2})^{24}}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{23},$$
et
$$B = \sum_{k=0}^{20} \left(\frac{1}{9}\right)^k - 1 = \frac{1-(\frac{1}{9})^{21}}{1-\frac{1}{9}} - 1 = \frac{1-(\frac{1}{9})^{20}}{8}.$$

Éléments de correction - SVF 11

On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. En particulier,
$$\sum_{k=0}^{15}(4k+3) = 4\left(\sum_{k=0}^{15} k\right) + \sum_{k=0}^{15} 3 = 4\frac{15 \times 16}{2} + 16 \times 3 = 4 \times 15 \times 8 + 16 \times 3.$$

Éléments de correction - SVF 12

On a une somme avec des coefficients binomiaux à simplifier : il faut immédiatement penser au binôme de Newton !
$$A = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} = (2+1)^n = 3^n.$$
Pour la question suivante, on a une somme encore une somme avec un coefficient binomial, mais les indices de sommation ne sont pas comme dans la formule du binôme de Newton : dans ce cas il faut ajouter ou soustraire les termes manquants.
$$B = A - \binom{n}{0}2^0 - \binom{n}{n}2^n = 3^n - 1 - 2^n.$$

Éléments de correction - SVF 13

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k} + \frac{2^{n+1}}{n+1}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{\ell=1}^{n+1} \frac{1}{\ell}, \qquad \sum_{k=1}^{(n+1)^2} k^3 = \sum_{k=1}^{n^2} k^3 + \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2} k^3, \qquad \sum_{k=2}^{n+2} \mathrm{e}^k = \sum_{\ell=0}^{n} \mathrm{e}^{\ell+2}.$$

Éléments de correction - SVF 14

On utilise la formule de la série géométrique. On peut commencer par un changement d'indice dans la somme :

$$\sum_{k=2}^{n+2} \mathrm{e}^k = \sum_{\ell=0}^{n} \mathrm{e}^{\ell+2} = \mathrm{e}^2 \sum_{\ell=0}^{n} \mathrm{e}^{\ell} = \mathrm{e}^2 \frac{1-\mathrm{e}^{n+1}}{1-\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{n+3}}{1-\mathrm{e}}.$$

On aurait aussi pu appliquer la formule de la série géométrique jusqu'au rang $n+2$:

$$\sum_{k=2}^{n+2} \mathrm{e}^k = \sum_{k=0}^{n+2} \mathrm{e}^k - 1 - \mathrm{e} = \frac{1-\mathrm{e}^{n+3}}{1-\mathrm{e}} - (1+\mathrm{e}) = \frac{1-\mathrm{e}^{n+3} - 1 + \mathrm{e}^2}{1-\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{n+3}}{1-\mathrm{e}}.$$