
Savez-vous faire ?

Raisonnement par analyse/synthèse

Si l'on veut résoudre un exercice par analyse/synthèse, il faut procéder, comme le nom l'indique, en deux étapes. Si la première étape est convenablement conduite, la seconde ne présente la plupart du temps aucune difficulté. Supposons que l'on doive chercher un ensemble de fonctions vérifiant certaines contraintes.

- *Etape 1 : l'analyse.* C'est l'étape délicate. On suppose pour commencer qu'il existe une fonction f satisfaisant le problème, et on essaie de déterminer quelle forme pourrait avoir une telle fonction. Pour cela, il peut y avoir beaucoup de pistes possibles. En voici quelques unes :
 - déterminer des valeurs particulières pour f , par exemple $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, etc. Noter que si $f(0)$ ou $f(1)$ ne peut être déterminé, il peut être judicieux de le considérer comme un paramètre ;
 - étudier les propriétés éventuelles : monotonie, signe, parité, périodicité, etc. (nous verrons le vocabulaire manquant bientôt !)
 - essayer d'exprimer directement $f(x)$ en fonction de $f(0)$, $f(1)$, etc.

L'idée générale est de dégager suffisamment de contraintes sur les solutions éventuelles pour limiter le nombre de candidats-solutions à tester.

- *Etape 2 : la synthèse.* A l'étape précédente, on a supposé que le problème avait une solution. Il faut le vérifier ! Pour cela, il suffit de tester les candidats-solutions obtenus à l'étape d'analyse.

SVF 15 (Équation fonctionnelle de Cauchy pour les entiers naturels). On désire connaître, si elles existent, toutes les fonctions définies sur $\mathbf{N}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$ telles que :

$$\forall (n, m) \in \mathbf{N}^2, \quad f(n + m) = f(n) + f(m). \quad (*)$$

Pour cela on procède par analyse/synthèse.

1. *Analyse.* On suppose que l'on a trouvé une fonction f de $\mathbf{N}$ vers $\mathbf{R}$ vérifiant (*).
 - a) En choisissant judicieusement des valeurs pour n et m dans (*), montrer que $f(0) = 0$.
 - b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = nf(1)$.

On vient donc de montrer que si une fonction f de $\mathbf{N}$ vers $\mathbf{R}$ vérifie (*), alors elle s'écrit

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ n & \longmapsto & an \end{array}$$

où a est un nombre réel.

2. *Synthèse.* À vous de jouer.
3. *Conclusion.* Donner toutes les solutions du problème.

SVF 16. Démontrer qu'il existe une unique fonction $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, \quad f(x - f(y)) = 1 - x - y. \quad (*)$$

SVF 17. Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$ et à valeurs réelles. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ avec $x \neq y$. On appellera **pente** de f entre x et y la valeur : $\frac{f(x) - f(y)}{x - y}$.
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ à pente constante.

Éléments de correction

Éléments de correction - SVF 15

On a ici à résoudre une équation fonctionnelle, c'est-à-dire une équation dont l'inconnue est une fonction. Pour ce genre de problème, un raisonnement par analyse/synthèse est très souvent adapté !

1. (a) En prenant $n = m = 0$ dans $(\star)$, on obtient $f(0) = 2f(0)$, d'où

$$f(0) = 0.$$

- (b) On pose pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ $\mathcal{P}_n$: « $f(n) = nf(1)$ ». Montrons par récurrence sur n que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

- Pour $n = 0$ on a bien $f(0) = 0 \times f(1)$ d'après la première question, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Alors :

$$\begin{aligned} f(n+1) &= f(n) + f(1) \text{ d'après } (\star) \\ &= nf(1) + f(1) \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= (n+1)f(1), \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- Par principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = nf(1)$.

2. Soit $a \in \mathbf{R}$. Montrons que la fonction :

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ n & \longmapsto & an \end{array}$$

vérifie bien la relation $(\star)$. Pour $n, m \in \mathbf{N}$, on a $f(n+m) = a(m+n) = am + an = f(n) + f(m)$. On en déduit que pour tout réel a , f vérifie $(\star)$.

3. D'après ce qui précède, l'ensemble des fonctions vérifiant $(\star)$ est $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ n & \longmapsto & an \end{array} : a \in \mathbf{R} \right\}$.

Éléments de correction - SVF 16

Le raisonnement par analyse/synthèse peut être adapté quand on cherche à démontrer qu'il existe une unique solution à un problème donné. La phase d'analyse permet de montrer l'unicité et la phase de synthèse l'existence.

- *Analyse.* On suppose qu'il existe une fonction $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ satisfaisant $(\star)$.
 $f(f(0) - f(0)) = 1 - f(0) - 0$, donc $2f(0) = 1$ puis $f(0) = \frac{1}{2}$.
Soit $y \in \mathbf{R}$. $f(f(y) - f(y)) = 1 - f(y) - y$, donc $f(y) = -f(0) + 1 - y = -y + \frac{1}{2}$.
Ainsi, si une solution au problème existe, elle ne peut être que $x \longmapsto -x + \frac{1}{2}$ (en particulier elle est unique). Il reste à faire la réciproque : vérifier que la fonction obtenue est bien une solution du problème (autrement dit qu'il existe bien une solution au problème) !
- *Synthèse.* Posons $f : x \longmapsto -x + \frac{1}{2}$. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

$$f(x - f(y)) = -(x - f(y)) + \frac{1}{2} = -x + f(y) + \frac{1}{2} = -x - y + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 - x - y$$

Donc f vérifie bien $(\star)$.

- Finalement, l'unique solution du problème est $x \longmapsto -x + \frac{1}{2}$.

Éléments de correction - SVF 17

Intuitivement, on peut prévoir que les solutions sont les fonctions affines. Prouvons-le.

- *Analyse.* Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction à pente constante. Il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ avec $x \neq y$, on ait $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = a$. En particulier, pour $x \neq y$, $f(x) - f(y) = a(x-y)$ d'où en particulier $f(x) - f(0) = ax$, puis $f(x) = ax + f(0)$. Ainsi f est affine.
- *Synthèse.* Soit f une fonction affine. Il existe $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $f(x) = ax + b$. Alors

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{ax + b - ay - b}{x - y} = \frac{a(x - y)}{x - y} = a.$$

Donc les fonctions affines sont à pente constante.

- Finalement, l'ensemble des fonctions à pente constante est l'ensemble des fonctions affines.