
Savez-vous faire ?

Valeur absolue et racine carrée

Vous devez savoir résoudre les équations et inéquations qui font intervenir les fonctions valeurs absolues et racines carrées.

SVF 18. Résoudre les équations et les inéquations suivantes d'inconnue x réelle.

(a) $|2x - 1| = 3$;

(d) $|x - 2| \leq 5$;

(g) $|2x + 3| > -1$;

(b) $|2x - 1| = |4 - x|$;

(e) $|3x - 1| \geq 4$;

(h) $|x + 8| \leq 0$;

(c) $|x + 4| = -1$;

(f) $|3 - 2x| < 6$;

(i) $|x^2 + 2x - 3| \leq 5$.

SVF 19. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue x réelle.

(a) $\sqrt{x + 3} = 2$;

(d) $\sqrt{x + 3} \geq 2$;

(g) $\sqrt{x + 8} > 0$;

(b) $2\sqrt{x + 1} + 3 = 1$;

(e) $\sqrt{2x + 6} < 6$;

(h) $\sqrt{x^2 + 4x} \geq x + 1$;

(c) $\sqrt{x - 3} + \sqrt{x} = 1$;

(f) $\sqrt{-x + 2} \leq -1$;

(i) $\sqrt{2 - x} - \sqrt{6 + 3x} \geq 0$.

SVF 20. Résoudre les équations et les inéquations suivantes d'inconnue x réelle.

(a) $|x + 5| = x$;

(c) $\sqrt{x + 1} = x$;

(e) $\sqrt{x + 1} \leq 2 - x$;

(b) $|x - 2| + |3x + 1| = 4$;

(d) $\sqrt{x + 1} \leq x - 2$;

(f) $|3x - 5| \leq |2x + 3|$.

Éléments de correction

Éléments de correction - SVF 18

- (a) Pour les équations, on utilise le résultat de cours suivant : pour tout $(a, x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$, $|x| = a \iff x = a$ ou $x = -a$. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$2x - 1 = 3 \iff 2x - 1 = 3 \iff x = 2,$$

et

$$2x - 1 = -3 \iff x = -1.$$

Finalement, l'ensemble des solutions est $\{-1, 2\}$.

- (b) On utilise une conséquence du résultat évoqué dans la question précédente : pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $|x| = |y| \iff (x = y \text{ ou } x = -y)$. Vous pouvez essayer de démontrer ce résultat à partir de celui de la question 1. pour vous entraîner.

Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$2x - 1 = 4 - x \iff 3x = 5 \iff x = \frac{5}{3},$$

et

$$2x - 1 = x - 4 \iff x = -3.$$

Finalement, l'ensemble des solutions est $\{-3, \frac{5}{3}\}$.

- (c) Une valeur absolue est toujours positive, donc l'ensemble des solutions est $\emptyset$.
- (d) Pour résoudre les inéquations, on utilise le résultat de cours suivant : pour tout $(a, x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$, $|x| \leq a \iff x \in [-a; a]$ et $|x| \geq a \iff x \leq -a$ ou $x \geq a$. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$x - 2 \leq 5 \iff x \leq 7,$$

et,

$$x - 2 \geq -5 \iff x - 2 \geq -5 \iff x \geq -3.$$

Finalement l'ensemble des solutions est $[-3; 7]$.

- (e) Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$3x - 1 \geq 4 \iff x \geq \frac{5}{3} \quad \text{et} \quad 3x - 1 \leq -4 \iff x \leq -1,$$

donc l'ensemble des solutions est $]-\infty; -1] \cup [\frac{5}{3}; +\infty[$.

- (f) Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$3 - 2x < 6 \iff x > -\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad 3 - 2x > -6 \iff x < \frac{9}{2}.$$

Finalement, l'ensemble des solutions est $]-\frac{3}{2}; \frac{9}{2}[$.

- (g) La fonction valeur absolue est positive, donc l'ensemble des solutions est $\mathbf{R}$.
- (h) Soit $x \in \mathbf{R}$. La fonction valeur absolue est positive, donc

$$|x + 8| \leq 0 \iff x + 8 = 0 \iff x = -8,$$

et ainsi l'ensemble des solutions est $\{-8\}$.

- (i) Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$x^2 + 2x - 3 \leq 5 \iff x \in [-4; 2],$$

et

$$x^2 + 2x - 3 \geq -5 \iff x \in \mathbf{R},$$

donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est $[-4; 2]$.

(a) Pour résoudre une équation avec des racines carrées, il faut procéder en plusieurs étapes :

- on cherche l'ensemble de définition de l'équation ;
- on procède ensuite par implications : on élève chaque membre de l'équation au carré, après avoir isolé une racine carrée d'un côté de l'équation ;
- une fois les solutions obtenus par implications, il faut penser à la réciproque, i.e. vérifier que les solutions obtenues sont solutions du problème de départ (c'est un raisonnement par analyse/synthèse que l'on mène : la phase d'analyse est la résolution par implications et la phase de synthèse la vérification des candidats-solutions obtenus).

Soit $x \in \mathbf{R}$. $x + 3 \geq 0 \iff x \geq -3$, donc l'ensemble de définition de l'équation est $D = [-3; +\infty[$.

Analyse. Soit $x \in D$ vérifiant $\sqrt{x+3} = 2$. En élevant au carré, on a $x + 3 = 4$, d'où $x = 1$ (donc si une solution existe, c'est nécessairement 1).

Synthèse. On a $\sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$ donc 1 vérifie l'équation proposée.

Finalement, l'ensemble des solutions est $\{1\}$.

(b) Se rappeler que la fonction racine carrée est positive peut parfois éviter certains calculs...

Soit $x \in \mathbf{R}$. $x + 1 \geq 0 \iff x \geq -1$, donc l'ensemble de définition de l'équation est $D = [-1; +\infty[$.

Soit $x \in D$ vérifiant $2\sqrt{x+1} + 3 = 1$ On a $\sqrt{x+1} = -1$, donc, puisque la fonction racine carrée est positive, l'ensemble des solutions est $\emptyset$.

(c) Soit $x \in \mathbf{R}$. On a $x - 3 \geq 0 \iff x \geq 3$, donc l'ensemble de définition de l'équation est $D = [3; +\infty[$.

Soit $x \in D$ vérifiant $\sqrt{x-3} + \sqrt{x} = 1$. On a $\sqrt{x-3} = 1 - \sqrt{x}$ puis, en élevant au carré, $x - 3 = 1 - 2\sqrt{x} + x$. On isole $\sqrt{x}$, puis on élève au carré :

$$-2\sqrt{x} = -4 \quad \text{donc} \quad 4x = 16 \quad \text{donc} \quad x = 4$$

Ainsi le seul candidat-solution est 4.

On a $\sqrt{4-3} + \sqrt{4} = 3$ différent de 1, donc l'ensemble des solutions de l'équation est $\emptyset$.

(d) Pour résoudre une inéquation avec des racines carrées, on utilise les résultats suivants : pour tout $(a, x) \in (\mathbf{R}_+)^2$, $\sqrt{x} \leq a \iff x \in [0; a^2]$ et $\sqrt{x} \geq a \iff x \geq a^2$.

Soit $x \in \mathbf{R}$. $x + 3 \geq 0 \iff x \geq -3$, donc le domaine de définition de l'inéquation est $D = [-3; +\infty[$.

Soit $x \in D$. On a $\sqrt{x+3} > 2 \iff x + 3 \geq 4 \iff x \geq 1$, donc l'ensemble des solutions est $[1; +\infty[$.

(e) Soit $x \in \mathbf{R}$. $2x + 6 \geq 0 \iff 2x + 6 \geq -3$, donc le domaine de définition de l'inéquation est $D = [-3; +\infty[$.

Soit $x \in D$.

$$\sqrt{2x+6} < 6 \iff 0 \leq 2x + 6 < 36 \iff -3 \leq x < 15,$$

donc l'ensemble des solutions est $[-3; 15[$.

(f) Une racine carrée est toujours positive, donc l'ensemble des solutions est $\emptyset$.

(g) Soit $x \in \mathbf{R}$. $x + 8 \geq 0 \iff x \geq -8$. Notons $D = [-8; +\infty[$ l'ensemble de définition de l'inéquation

Soit $x \in D$. Une racine carrée est toujours positive, donc

$$\sqrt{x+8} > 0 \iff x + 8 \neq 0 \iff x \neq -8.$$

Finalement, l'ensemble des solutions est $\mathbf{R} \setminus \{-8\} \cap D =]-8; +\infty[$.

(h) Soit $x \in \mathbf{R}$. $x^2 + 4x \geq 0 \iff x(x+4) \geq 0 \iff x \in]-\infty; -4] \cup [0; +\infty[$. Donc l'ensemble de définition de l'inéquation est $D =]-\infty; -4] \cup [0; +\infty[$.

Soit $x \in D$. Supposons $x \geq -1$, de sorte que $x + 1 \geq 0$. Alors :

$$\sqrt{x^2 + 4x} \geq x + 1 \iff x^2 + 4x \geq x^2 + 2x + 1 \iff x \geq \frac{1}{2}.$$

Supposons maintenant $x + 1 \leq 0$. Alors $\sqrt{x^2 + 4x} \geq x + 1$ est toujours vérifiée.

Finalement, l'ensemble des solutions est $(]-\infty; -1] \cup [\frac{1}{2}; +\infty[) \cap D =]-\infty; -4] \cup [\frac{1}{2}; +\infty[$.

(i) Soit $x \in \mathbf{R}$. $2 - x \geq 0 \iff x \leq 2$ et $6 + 3x \geq 0 \iff x \geq -2$, donc l'ensemble de définition de l'inéquation est $D = [-2; 2]$.

Soit $x \in D$.

$$\sqrt{2-x} - \sqrt{6+3x} \geq 0 \iff \sqrt{2-x} \geq \sqrt{6+3x} \iff 2-x \geq 6+3x \iff x \leq -1.$$

Donc l'ensemble des solutions est $]-\infty; -1] \cap D = [-2; -1]$.

Éléments de correction - SVF 20

- (a) Puisque une valeur absolue est toujours positive, l'équation n'a pas de solution négative.

Soit $x \in \mathbf{R}_+$.

$$x + 5 = x \iff 5 = 0,$$

et

$$x + 5 = -x \iff x = -\frac{5}{2},$$

Aucune des équations précédente n'admet de solution sur $\mathbf{R}_+$, donc l'ensemble des solutions de l'équation demandée est $\emptyset$.

- (b) Soit $x \in \mathbf{R}$.

- Si $x \geq 2$,

$$|x - 2| + |3x + 1| = 4 \iff |3x + 1| = 4 - |x - 2| \iff |3x + 1| = 6 - x.$$

Or,

$$3x + 1 = 6 - x \iff x = \frac{5}{4} \quad \text{et} \quad 3x + 1 = x - 6 \iff -\frac{7}{2}.$$

Donc il n'y a aucune solution supérieure à 2.

- Si $x < 2$,

$$|x - 2| + |3x + 1| = 4 \iff |3x + 1| = 4 - |x - 2| \iff |3x + 1| = 2 + x.$$

Or,

$$3x + 1 = 2 + x \iff x = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 3x + 1 = -2 - x \iff -\frac{3}{4},$$

donc les solutions inférieures strictement à 2 sont $\frac{1}{2}$ et $-\frac{3}{4}$.

Finalement, l'ensemble des solutions est $\{-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\}$.

- (c) Soit $x \in [-1, +\infty[$. Supposons $x \geq 0$.

$$\sqrt{x+1} = x \iff x+1 = x^2 \iff x^2 - x - 1 = 0 \iff x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \iff x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

car $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \geq 0$. De plus, $\sqrt{x+1} \geq 0$, donc l'équation $\sqrt{x+1} = x$ n'admet pas de solution sur $\mathbf{R}_-$.

Finalement, l'ensemble des solutions est $\{\frac{\sqrt{5}+1}{2}\}$.

- (d) Soit $x \in [-1, +\infty[$. Si $x < 2$, $x - 2 < 0$, donc l'équation n'admet pas de solution sur $] -\infty, 2[$. Si $x \geq 2$,

$$\sqrt{x+1} \leq x - 2 \iff x + 1 \leq (x - 2)^2 \iff x^2 - 5x + 3 \geq 0 \iff x \in \left] -\infty, \frac{5-\sqrt{13}}{2} \right] \cup \left[\frac{5+\sqrt{13}}{2}, +\infty \right[.$$

avec $\frac{5-\sqrt{13}}{2} < 2$ et $\frac{5+\sqrt{13}}{2} \geq 2$.

Finalement, l'ensemble des solutions est $[\frac{\sqrt{13}+5}{2}, +\infty[$.

- (e) L'ensemble des solutions est $[-1, \frac{-\sqrt{13}+5}{2}]$.

- (f) L'ensemble des solutions est $[\frac{2}{5}, 8]$.