
Savez-vous faire ?

Etudes de fonction

SVF 21. Dériver formellement chacune des fonctions suivantes (on ne demande pas le domaine de validité des calculs effectués).

1. $f_1 : x \mapsto (3x^2 + 5)^2$;

4. $f_4 : x \mapsto x^{\frac{1}{x^2}}$;

7. $f_7 : x \mapsto \frac{3}{\ln(2x^2+3)}$;

2. $f_2 : x \mapsto \frac{-2x}{\sqrt{1+x^2}}$;

5. $f_5 : x \mapsto \exp(\sin(3x^2))$;

8. $f_8 : x \mapsto \sin(x)^{(\cos(x)^2)}$;

3. $f_3 : x \mapsto x^2 \ln(5x + 4)$;

6. $f_6 : x \mapsto \sqrt{\exp(2x^2) + 3}$;

9. $f_9 : x \mapsto x \tan(x)$.

SVF 22. Notons f la fonction définie sur $\mathbf{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Calculer f' , f'' (dérivée de f'), $f^{(3)}$ (dérivée de f'') et $f^{(4)}$ (dérivée de $f^{(3)}$). Trouver une conjecture exprimant la dérivée n -ième de f notée $f^{(n)}$, en fonction de n , pour tout entier naturel n non nul. La démontrer.

SVF 23. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \cos(\frac{x}{3}) + \sin(4x + 3)$ est périodique et bornée.

SVF 24. Montrer que la fonction f définie sur $[-2; 3]$ par $f(x) = \frac{x^2+x-3}{x-5}$ est bornée.

SVF 25. Prouver que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $\sin(x) \leq x$.

SVF 26. Etudier rapidement les fonctions suivantes (domaine de définition, tableau de variations, asymptotes éventuelles, représentation graphique) :

$$f_1 : x \mapsto \frac{2}{x} + \frac{3}{2}x ;$$

$$f_2 : x \mapsto \frac{1}{\ln x} ;$$

$$f_3 : x \mapsto x \ln x ;$$

$$f_4 : x \mapsto \frac{x-1}{x-2} ;$$

$$f_5 : x \mapsto e^x - x ;$$

$$f_6 : x \mapsto (x+2)e^{x-1} - 1.$$

Éléments de correction

Éléments de correction - SVF 21

On obtient :

1. $f'_1 : x \mapsto 12x(3x^2 + 5)$;
2. $f'_2 : x \mapsto \frac{-2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$;
3. $f'_3 : x \mapsto 2x \ln(5x+4) + \frac{5x^2}{5x+4}$;
4. $f'_4 : x \mapsto (-2 \ln(x) + 1)x^{\frac{1}{2}-3}$;
5. $f'_5 : x \mapsto 6x \cos(3x^2) \exp(\sin(3x^2))$;
6. $f'_6 : x \mapsto \frac{2xe^{(2x^2)}}{\sqrt{\exp(2x^2)+3}}$;
7. $f'_7 : x \mapsto \frac{-12x}{(2x^2+3)(\ln(2x^2+3))^2}$;
8. $f'_8 : x \mapsto (-2 \sin(x) \cos(x) \ln(\sin(x)) + \frac{\cos(x)^3}{\sin(x)}) \sin(x)^{(\cos(x)^2)}$;
9. $f'_9 : x \mapsto \tan(x) + x(1 + \tan^2(x))$.

Éléments de correction - SVF 22

f est indéfiniment dérivable, et on obtient :

$$f' : x \mapsto -\frac{1}{(x+1)^2}, \quad f'' : x \mapsto \frac{2}{(x+1)^3}, \quad f^{(3)} : x \mapsto -\frac{3 \times 2}{(x+1)^4}, \quad f^{(4)} : x \mapsto \frac{4 \times 3 \times 2}{(x+1)^5}.$$

On conjecture que, pour tout entier naturel n non nul,

$$f^{(n)} : x \mapsto (-1)^n \frac{n!}{(x+1)^{n+1}}.$$

Ce résultat se démontre par récurrence. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose « $f^{(n)} : x \mapsto (-1)^n \frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$ ». H_1 a été vérifiée avant. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que H_n soit vraie.

On a $f^{(n)} : x \mapsto (-1)^n \frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ et, pour tout $x \in \mathbf{R}^*$,

$$(f^{(n)})'(x) = (-1)^n \times n! \times \frac{-(n+1)}{(x+1)^{n+2}} = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{(x+1)^{n+2}}.$$

Ainsi, on a bien établi que

$$f^{(n+1)} : x \mapsto (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{(x+1)^{n+2}}$$

Donc H_{n+1} est vraie, et le principe de récurrence permet de conclure.

Éléments de correction - SVF 23

On vérifie que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x+6\pi) = f(x)$, donc f est 6π -périodique. De plus, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$|f(x)| \leq \left| \cos\left(\frac{x}{3}\right) \right| + |\sin(4x+3)| \leq 2.$$

Donc f est une fonction bornée.

Éléments de correction - SVF 24

Soit $x \in [-2; 3]$. Alors $x-5 < 0$, donc

$$|f(x)| = \frac{|x^2 + x - 3|}{5-x}.$$

De plus, d'après l'inégalité triangulaire, $|x^2 + x - 3| \leq |x|^2 + |x| + 3 \leq 15$ car $|x| \leq 3$. De plus, $5-x > 2$, donc $\frac{1}{5-x} < \frac{1}{2}$. Par produit, on en déduit que

$$|f(x)| \leq \frac{15}{12}.$$

Éléments de correction - SVF 25

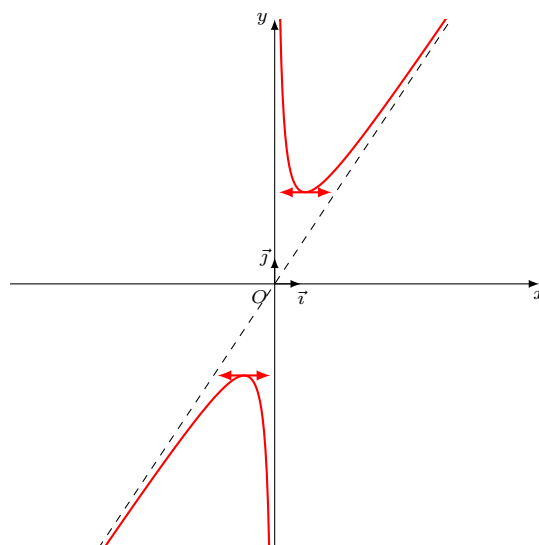
Il suffit d'étudier la différence $f : x \mapsto x - \sin(x)$ et de montrer que celle-ci est positive sur $\mathbf{R}_+$.

Éléments de correction - SVF 26

- La fonction f_1 , définie sur $\mathbf{R}^*$, est impaire. Il suffit donc de l'étudier sur $\mathbf{R}_+^*$.

x	0	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f_1'(x)$	-	0	+
f_1	$+\infty$	$2\sqrt{3}$	$+\infty$

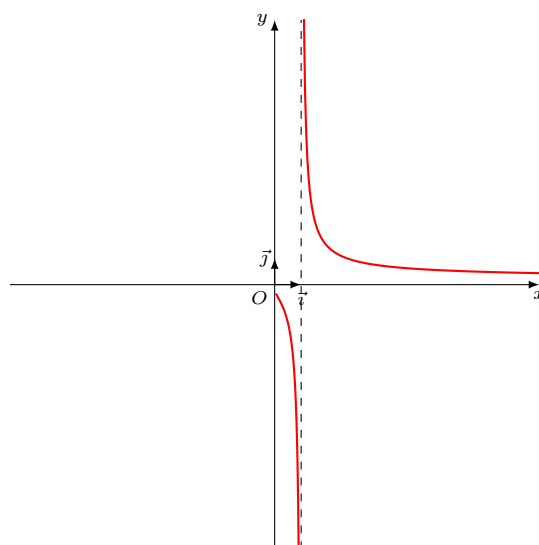
Les droites d'équation $x = 0$ et $y = \frac{3}{2}x$ sont asymptotes à la courbe représentative de f_1 .



- On a :

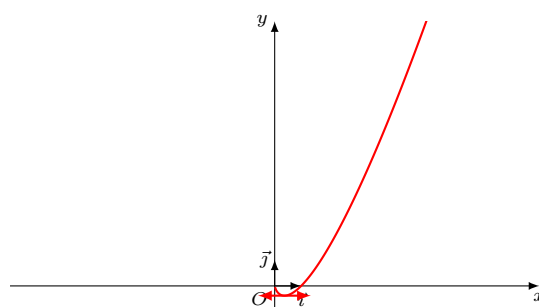
x	0	1	$+\infty$
$f_2'(x)$	-	-	-
f_2	0	$+\infty$	0

La droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f_2 , et la droite d'équation $y = 0$ en est une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.



- On a :

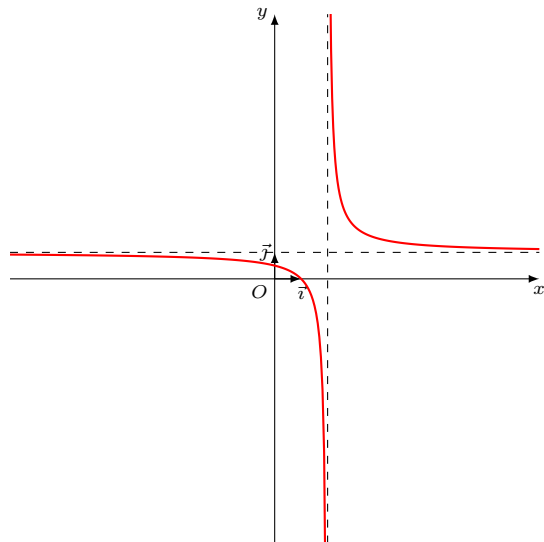
x	0	e^{-1}	$+\infty$
$f_3'(x)$	-	0	+
f_3	0	$-e^{-1}$	$+\infty$



- On a :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'_4(x)$	$-$		$-$
f_4	$1 \searrow$ $-\infty$		$+\infty \searrow$ 1

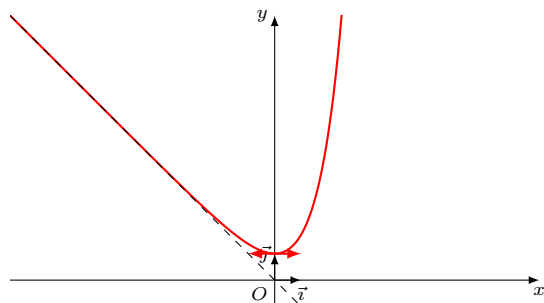
La droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f_4 , et la droite d'équation $y = 1$ en est une asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.



5. On a :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'_5(x)$	$-$	0	$+$
f_5	$+\infty \searrow$ 1		$+\infty \nearrow$ 1

La droite d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $-\infty$.



6. On a :

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f'_6(x)$	$-$	0	$+$
f_6	$-1 \searrow$ $-e^{-4} - 1$		$+\infty \nearrow$ $+\infty$

La droite d'équation $y = -1$ est asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $-\infty$.

