
Savez-vous faire ?

Théorème de la bijection

SVF 27. Énoncer précisément le théorème de la bijection et le théorème de dérivabilité des fonctions réciproques.

SVF 28. Recopier et compléter le texte suivant :

La fonction sinus est ... et ... sur $I = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. D'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de ... sur son image ... = ...

On appelle fonction arcsinus et on note Arcsin sa fonction réciproque. Ainsi, la fonction arcsinus est définie sur ..., à valeurs dans ... et pour tout $x \in \dots$, $y \in \dots$,

$$\text{Arcsin}(x) = y \iff \dots$$

La fonction sinus est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, et pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin'(x) \neq 0$. D'après le théorème de dérivation des fonctions réciproques, la fonction sinus réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ dans ..., donc la fonction arcsinus est dérivable dans ..., et pour tout $x \in \dots$,

$$\text{Arcsin}(x) = \dots$$

SVF 29. On introduit la fonction f définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par :

$$f(x) = x^2 + \ln(x).$$

1. Montrer que la fonction f réalise une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ sur un intervalle J que l'on déterminera. On note g sa fonction réciproque.
2. Prouver que la fonction g est dérivable sur J , et exprimer g' à l'aide de g .
3. Calculer $g(1)$ et $g'(1)$.

1. La fonction f est une somme de deux fonctions continues et strictement croissantes sur $\mathbf{R}_+^*$. Elle est donc continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}_+^*$. Le théorème de la bijection assure alors que f réalise une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ sur son image

$$f(\mathbf{R}_+^*) = \left[\lim_{x \rightarrow 0} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right] = \mathbf{R}.$$

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$. Le théorème de dérivation des fonctions réciproques assure alors que la fonction g est dérivable en tout point x de $\mathbf{R}$ vérifiant $f'(g(x)) \neq 0$.

Soit $x \in \mathbf{R}$. Calculons :

$$f'(g(x)) = 2g(x) + \frac{1}{g(x)} = \frac{2g^2(x) + 1}{g(x)}.$$

Or $2g^2(x) + 1 \geq 1$, donc $f'(g(x)) \neq 0$.

Par conséquent, la fonction g est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{g(x)}{2g^2(x) + 1}.$$

3. Par définition, $g(1)$ est l'unique antécédent de 1 par f . Or $f(1) = 1$, donc $g(1) = 1$. Alors

$$g'(1) = \frac{g(1)}{2g^2(1) + 1} = \frac{1}{3}.$$

SVF 30. Montrer que la fonction f définie sur $I = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\sin(x)},$$

réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera. On pourra, pour étudier le signe de la dérivée de f , montrer que $\tan x > x$ pour tout $x \in I$.

SVF 31. Montrer que l'équation

$$3x^5 - 25x^3 + 60x = 3$$

possède une unique solution réelle.

SVF 32. 1. Montrer que la fonction cosinus hyperbolique réalise une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur un intervalle J à préciser. On note g sa fonction réciproque.

2. Sans déterminer l'expression de g , montrer que g est dérivable sur $J \setminus \{1\}$ et déterminer, pour tout $x \in J \setminus \{1\}$ une expression simple de $g'(x)$.

Éléments de correction

Éléments de correction - SVF 27

Soit f une fonction numérique, continue et strictement monotone sur un intervalle I . Alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

Notons g sa fonction réciproque.

Supposons que f soit dérivable sur I . Alors la fonction g est dérivable en tout point x de $f(I)$ tel que

$$f'(g(x)) \neq 0$$

De plus, en un tel point, le nombre dérivé de g en x est donné par

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}.$$

Éléments de correction - SVF 28

Recopier et compléter le texte suivant :

La fonction sinus est continue et dérivable sur $I = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. D'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de I sur son image $\left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right); \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = [-1; 1]$.

On appelle fonction arcsinus et on note Arcsin sa fonction réciproque. Ainsi, la fonction arcsinus est définie sur $[-1; 1]$, à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $x \in [-1; 1]$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\text{Arcsin}(x) = y \iff x = \sin(y)$$

La fonction sinus est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, et pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin'(x) \neq 0$. D'après le théorème de dérivation des fonctions réciproques, la fonction sinus réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ dans $](-1; 1[$, donc la fonction arcsinus est dérivable dans $](-1; 1[$, et pour tout $x \in](-1; 1[$,

$$\text{Arcsin}(x) = \frac{1}{\sin'(\text{Arcsin}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Éléments de correction - SVF 29

1. La fonction f est une somme de deux fonctions continues et strictement croissantes sur $\mathbf{R}_+^*$. Elle est donc continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}_+^*$. Le théorème de la bijection assure alors que f réalise une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ sur son image

$$f(\mathbf{R}_+^*) = \left] \lim_{x \rightarrow 0} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[= \mathbf{R}.$$

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$. Le théorème de dérivation des fonctions réciproques assure alors que la fonction g est dérivable en tout point x de $\mathbf{R}$ vérifiant $f'(g(x)) \neq 0$.

Soit $x \in \mathbf{R}$. Calculons :

$$f'(g(x)) = 2g(x) + \frac{1}{g(x)} = \frac{2g^2(x) + 1}{g(x)}.$$

Or $2g^2(x) + 1 \geq 1$, donc $f'(g(x)) \neq 0$.

Par conséquent, la fonction g est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{2g(x)}{2g^2(x) + 1}.$$

3. Par définition, $g(1)$ est l'unique antécédent de 1 par f . Or $f(1) = 1$, donc $g(1) = 1$. Alors

$$g'(1) = \frac{g(1)}{2g^2(1) + 1} = \frac{1}{3}.$$

Éléments de correction - SVF 30

La fonction f est dérivable sur son domaine de définition car elle s'écrit comme le quotient de deux fonctions usuelles dérivables sur leur domaine de définition.

Pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{\sin^2(x)} = \frac{\cos(x)(\tan(x) - x)}{\sin^2(x)}.$$

La fonction cosinus est strictement positive sur I . Par conséquent, la fonction f' est du signe de la fonction

$$g : x \mapsto \tan(x) - x$$

sur l'intervalle I .

Étudions la fonction g sur $[0; \frac{\pi}{2}[$. Elle est dérivable sur $[0; \frac{\pi}{2}[$ et pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}[$, $g'(x) = \tan^2(x)$.

Par conséquent, la fonction g est strictement croissante sur $[0; \frac{\pi}{2}[$ donc, pour tout $x \in I$, $g(x) > g(0)$, ce qui prouve que $g(x) > 0$.

Par ailleurs, la fonction f' est strictement positive sur I . La fonction f est donc strictement croissante sur I . Étant continue et strictement croissante sur l'intervalle I , le théorème de la bijection monotone assure qu'elle réalise une bijection de I sur son image $f(I) = \left] \lim_{x \rightarrow 0} f(x); \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) \right[=]1; +\infty[$.

Éléments de correction - SVF 31

Il suffit d'étudier la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x - 3$. On montre alors, grâce au tableau de variations de f , que f ne s'annule pas sur les intervalles $]-\infty; -1]$ et $[1; +\infty[$. Le théorème de la bijection monotone sur l'intervalle $[-1; 1]$ prouvera que f s'annule une unique fois sur $[-1; 1]$.

Éléments de correction - SVF 32

1. La fonction cosinus hyperbolique est continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur son image

$$\text{ch}(\mathbf{R}^+) = \left[\text{ch}(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{ch}(x) \right[= [1; +\infty[.$$

2. La fonction ch est dérivable sur $\mathbf{R}_+$. Le théorème de dérivation des fonctions réciproques assure alors que g est dérivable en tout point x de $[1; +\infty[$ tel que $\text{ch}'(g(x)) \neq 0$.

Soit $x \in [1; +\infty[$. Calculons : $\text{ch}'(g(x)) = \text{sh}(g(x))$. Or $\text{sh}^2 = \text{ch}^2 - 1$, et $\text{sh}(g(x)) \geq 0$ car $g(x) \in \mathbf{R}_+$. Ainsi

$$\text{ch}'(g(x)) = \sqrt{\text{ch}^2(g(x)) - 1} = \sqrt{1 - x^2}.$$

On en déduit que l'expression $\text{ch}'(g(x))$ ne s'annule que lorsque $x = 1$.

Par conséquent, la fonction g est dérivable sur $]1; +\infty[$ et, pour tout $x \in]1; +\infty[$,

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$