
Savez-vous faire ?

Equations trigonométriques

SVF 33. 1. A l'aide du cercle trigonométrique, compléter les égalités suivantes :

$$\begin{array}{lll} \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \dots & \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \dots & \tan(x + \frac{\pi}{2}) = \dots \\ \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \dots & \sin(x - \frac{\pi}{2}) = \dots & \tan(x - \frac{\pi}{2}) = \dots \\ \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \dots & \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \dots & \tan(\frac{\pi}{2} - x) = \dots \end{array}$$

SVF 34. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Compléter les assertions suivantes :

$$\cos(a) = \cos(b) \iff \dots$$

$$\sin(a) = \sin(b) \iff \dots$$

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\})^2$. Compléter l'assertion suivante :

$$\tan(a) = \tan(b) \iff \dots$$

SVF 35. Résoudre les équations suivantes, après avoir déterminé leur domaine de validité.

- | | |
|---|--|
| (1) $\cos(3x) = \cos(4x)$; | (6) $\tan(\frac{\pi}{8} - x) = \tan(2x + \frac{\pi}{4})$; |
| (2) $\sin(x + 3\pi) = \sin(3x + \frac{\pi}{3})$; | (7) $\tan^2(x) + 2\tan(x) + 1 = 0$; |
| (3) $\tan(\frac{\pi}{8} - x) = \tan(3x)$; | (8) $2\sin^2(3x - \frac{\pi}{3}) = 1$; |
| (4) $\cos(\frac{\pi}{8} + 2x) = \sin(3x)$; | (9) $4\cos^2(2x) - 2(1 - \sqrt{3})\cos(2x) = \sqrt{3}$. |
| (5) $\sin(2x + \frac{\pi}{5}) = \cos(\frac{\pi}{3} - 3x)$; | |

SVF 36. On appelle fonction sinusoidale toute fonction de la forme

$$x \mapsto A \cos(\omega x + \varphi) \quad \text{ou} \quad x \mapsto A \sin(\omega x + \varphi),$$

avec A , ω et φ trois nombres réels fixés.

Si f est une telle fonction, on dit que A est son **amplitude**, que ω est sa **pulsation** (le réel φ , qui est unique à 2π près, peut être appelé **phase** de la fonction, mais cette définition dépend de l'écriture de la fonction sous forme d'un cosinus ou d'un sinus).

- Montrer que si f est une fonction sinusoidale de pulsation non nulle ω , alors f est $\frac{2\pi}{\omega}$ -périodique.
- Montrer que pour tout nombre réel x ,

$$\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

En déduire que la fonction $f : x \mapsto \cos(x) - \sin(x)$ est une fonction sinusoidale, et déterminer son amplitude.

- Montrer que les fonctions suivantes sont des fonctions sinusoidales :

$$f_1 : x \mapsto 3\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x), \quad f_2 : x \mapsto -\cos(2x) - \sin(2x), \quad f_3 : x \mapsto 3\sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + 3\cos\left(x + \frac{\pi}{8}\right).$$

- Décrire les transformations géométriques permettant d'obtenir la courbe représentative de la fonction

$$x \mapsto 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{7}\right)$$

à partir de la courbe représentative de la fonction sinus.

Éléments de correction

Éléments de correction - SVF 33

$$\begin{array}{lll} \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x) & \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x) & \tan(x + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\tan(x)} \\ \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(x) & \sin(x - \frac{\pi}{2}) = -\cos(x) & \tan(x - \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\tan(x)} \\ \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x) & \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x) & \tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\tan(x)} \end{array}$$

Éléments de correction - SVF 34

$$\begin{aligned} \cos(a) = \cos(b) &\iff a \equiv b [2\pi] \text{ ou } a \equiv -b [2\pi] \\ \sin(a) = \sin(b) &\iff a \equiv b [2\pi] \text{ ou } a \equiv \pi - b [2\pi] \\ \tan(a) = \tan(b) &\iff a \equiv b [\pi] \end{aligned}$$

Éléments de correction - SVF 35

	Equation définie sur ...	Ensemble des solutions
(1)	$\mathbf{R}$	$\{\frac{2k\pi}{7} : k \in \mathbf{Z}\} \cup \{2k\pi : k \in \mathbf{Z}\} = \{\frac{2k\pi}{7} : k \in \mathbf{Z}\}$
(2)	$\mathbf{R}$	$\{-\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbf{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{3} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$
(3)	$\mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{5} + \frac{k\pi}{3}, -\frac{3\pi}{8} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$	$\{\frac{\pi}{32} + \frac{k\pi}{4} : k \in \mathbf{Z}\}$
(4)	$\mathbf{R}$	$\{\frac{3\pi}{40} + \frac{2k\pi}{5}, \frac{5\pi}{8} + 2k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$
(5)	$\mathbf{R}$	$\{\frac{19\pi}{150} + \frac{2k\pi}{5}, \frac{\pi}{30} + 2k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$
(6)	$\mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbf{Z}\}$	$\{-\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{3} : k \in \mathbf{Z}\}$
(7)	$\mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$	$\{-\frac{\pi}{4} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$
(8)	$\mathbf{R}$	$\{\frac{7\pi}{36} + \frac{k\pi}{6} : k \in \mathbf{Z}\}$
(9)	$\mathbf{R}$	$\{-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi, -\frac{5\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$

Éléments de correction - SVF 36

1. On vérifie aisément que si f est une fonction sinusoïdale de pulsation non nulle ω , alors f est définie sur $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x + \frac{2\pi}{\omega}) = f(x)$.
2. Soit $x \in \mathbf{R}$. En utilisant les formules d'addition, on obtient

$$\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left(\cos(x) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin(x) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \cos(x) - \sin(x).$$

La fonction f est donc sinusoïdale d'amplitude $\sqrt{2}$.

3. Pour tout nombre réel x ,

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2\sqrt{3}(\cos \frac{\pi}{3} \cos x - \sin \frac{\pi}{3} \sin x) = 2\sqrt{3} \cos(x + \frac{\pi}{3}) \\ f_2(x) &= \sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} \cos(2x) - \sin \frac{3\pi}{4} \sin(2x)) = \sqrt{2} \cos(2x + \frac{3\pi}{4}) \\ f_3(x) &= 6(\cos \frac{\pi}{3} \cos(x + \frac{\pi}{8}) + \sin \frac{\pi}{3} \sin(x + \frac{\pi}{8})) = 6 \cos(x - \frac{5\pi}{24}) \end{aligned}$$

On note Γ_1 la courbe représentative de la fonction $f_1 : x \mapsto \sin(x)$, Γ_2 celle de la fonction $f_2 : x \mapsto \sin(2x)$, Γ_3 celle de la fonction $f_3 : x \mapsto \sin(2x - \frac{\pi}{7})$ et Γ_4 celle de la fonction $f_4 : x \mapsto 3\sin(2x - \frac{\pi}{7})$.

Puisque $f_2(x) = f_1(2x)$ pour tout nombre réel x , Γ_2 est l'image de Γ_1 par la contraction horizontale de rapport $\frac{1}{2}$.

Puisque $f_3(x) = f_2(x - \frac{\pi}{14})$ pour tout nombre réel x , Γ_3 est l'image de Γ_2 par la translation de vecteur $\frac{\pi}{14}\vec{i}$.

Puisque $f_4(x) = 3f_3(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$, Γ_4 est l'image de Γ_3 par la dilatation verticale de rapport 3.

