

---

# Savez-vous faire ?

## Fonctions usuelles

---

Vous devez absolument connaître le domaine de définition, le domaine de dérivabilité, l'expression de la fonction dérivée et l'allure du graphe de toutes les fonctions usuelles, à savoir : les fonctions puissances, les fonctions exponentielles, les fonctions logarithmes, les fonctions circulaires et hyperboliques, les fonctions circulaires réciproques.

**SVF 37.** Calculer les nombres suivants :

- |                                                    |                                                      |                                                       |                                                      |
|----------------------------------------------------|------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| (A) $\operatorname{Arccos}(1)$ ;                   | (E) $\operatorname{Arccos}(\cos(\frac{3\pi}{5}))$ ;  | (I) $\operatorname{Arcsin}(\cos(\frac{7\pi}{8}))$ ;   | (M) $\tan(\operatorname{Arcsin}(-\frac{2}{3}))$ ;    |
| (B) $\operatorname{Arcsin}(-\frac{1}{2})$ ;        | (F) $\operatorname{Arcsin}(\sin(\frac{3\pi}{5}))$ ;  | (J) $\operatorname{Arccos}(\sin(\frac{11\pi}{16}))$ ; | (N) $\operatorname{ch}(\ln(\sin(\frac{5\pi}{6})))$ ; |
| (C) $\operatorname{Arctan}(-\frac{1}{\sqrt{3}})$ ; | (G) $\operatorname{Arctan}(\tan(\frac{32\pi}{5}))$ ; | (K) $\sin(\operatorname{Arcsin}(\frac{1}{5}))$ ;      | (O) $\tan(2\operatorname{Arctan}(\sqrt{2}))$ ;       |
| (D) $\operatorname{Arccos}(-\frac{1}{\sqrt{2}})$ ; | (H) $\operatorname{Arccos}(\cos(\frac{27\pi}{4}))$ ; | (L) $\cos(\operatorname{Arcsin}(-\frac{1}{5}))$ ;     | (P) $\cos(\operatorname{Arctan}(2))$ .               |

**SVF 38.** Résoudre les équations suivantes :

- |                                                                                                           |                                                              |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| 1. $4^{\frac{x}{x+1}} - 2^x = 0$ ;                                                                        | 4. $\operatorname{Arccos}(x) = \operatorname{Arcsin}(1-x)$ ; |
| 2. $\operatorname{Arcsin}(\frac{2x}{1+x^2}) = \frac{\pi}{3}$ ;                                            | 5. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ ;                           |
| 3. $\operatorname{Arcsin}(x) = \operatorname{Arccos}(\frac{1}{3}) - \operatorname{Arccos}(\frac{1}{4})$ ; | 6. $8^{6x} - 3 \times 8^{3x} - 4 = 0$ .                      |

**SVF 39.** Montrer de deux manières que pour tout  $x \in [-1; 1]$ ,

$$\operatorname{Arccos}(x) + \operatorname{Arccos}(-x) = \pi.$$

**SVF 40.** Montrer de deux manières que pour tout réel  $x$ ,

$$\operatorname{Arcsin}\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}\right) = \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)).$$

**SVF 41.** Etudier la fonction  $f : x \mapsto \cos^3(x) + \sin^3(x)$  puis donner le nombre de solutions sur  $[0; 2\pi]$  de l'équation

$$\cos^3(x) + \sin^3(x) = 1.$$

**SVF 42.** On introduit la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = x^{1+\frac{1}{x}}.$$

1. Déterminer le domaine de définition et le domaine de dérivabilité de la fonction  $f$ . Calculer sa dérivée.
2. Montrer que pour tout nombre réel  $x$  strictement positif,

$$\ln(x) \leq 1 + x.$$

3. En déduire le signe de  $f'$  et les variations de  $f$ .
4. Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son domaine de définition, et l'équation de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse 1.
5. Tracer l'allure de la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé.

---

## Éléments de correction

---

### Éléments de correction - SVF 37

- |                        |                        |                             |                             |
|------------------------|------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| (A) 0 ;                | (E) $\frac{3\pi}{5}$ ; | (I) $\frac{-3\pi}{8}$ ;     | (M) $-\frac{2}{\sqrt{5}}$ ; |
| (B) $-\frac{\pi}{6}$ ; | (F) $\frac{2\pi}{5}$ ; | (J) $\frac{3\pi}{16}$ ;     | (N) $\frac{5}{4}$ ;         |
| (C) $-\frac{\pi}{6}$ ; | (G) $\frac{2\pi}{5}$ ; | (K) $\frac{1}{5}$ ;         | (O) $-2\sqrt{2}$ ;          |
| (D) $\frac{3\pi}{4}$ ; | (H) $\frac{3\pi}{4}$ ; | (L) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$ ; | (P) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ .  |

### Éléments de correction - SVF 38

1. Les solutions sont 0 et 1.
2. Les solutions sont  $\sqrt{3}$  et  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ .
3. L'équation est  $\frac{\sqrt{8}-\sqrt{15}}{12}$ .
4. Les solutions sont 0, 1 et 4.
5. L'unique solution est  $\frac{2}{9}$ .

### Éléments de correction - SVF 39

- *Méthode 1.* Soit  $x \in [-1; 1]$ . Posons

$$A = \operatorname{Arccos}(x) + \operatorname{Arccos}(-x).$$

En utilisant les formules d'addition, et en remarquant que  $\sin(\operatorname{Arccos}(a)) = \sqrt{1-a^2}$  pour tout nombre réel  $a \in [-1; 1]$ , on obtient

$$\cos(A) = \cos(\operatorname{Arccos}(x))\cos(\operatorname{Arccos}(-x)) - \sin(\operatorname{Arccos}(x))\sin(\operatorname{Arccos}(-x)) = -x^2 - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2} = -1.$$

On en déduit que  $A \equiv \pi \pmod{2\pi}$ .

Or  $A \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$  car l'un des deux nombres  $\operatorname{Arccos}(x)$  ou  $\operatorname{Arccos}(-x)$  appartient à l'intervalle  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  alors que l'autre appartient à l'intervalle  $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ .

Ainsi,  $A = \pi$ .

- *Méthode 2.* Posons  $f : [-1; 1] \longrightarrow \mathbf{R}$   
$$x \longmapsto \operatorname{Arccos}(x) + \operatorname{Arccos}(-x)$$

La fonction  $f$  est dérivable sur  $] -1; 1[$  et pour tout  $x \in ] -1; 1[$ ,  $f'(x) = 0$ . On en déduit que  $f$  est constante sur  $] -1; 1[$ , donc sur  $[-1; 1]$  car elle est continue en  $-1$  et en  $1$ . De plus,  $f(0) = \pi$ . Donc  $f(x) = \pi$  pour tout  $x \in [-1; 1]$ .

### Éléments de correction - SVF 40

- *Méthode 1.* Soit  $x$  un nombre réel. Par définition,  $\operatorname{Arcsin}\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}\right)$  est l'unique nombre réel de l'intervalle  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  dont le sinus soit égal à  $\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$ . Calculons :

$$\sin^2(\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x))) = 1 - \cos^2(\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x))) = 1 - \frac{1}{1 + \tan^2(\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)))} = 1 - \frac{1}{1 + \operatorname{sh}^2(x)} = \frac{\operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)}.$$

De plus, le nombre réel  $\sin(\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)))$  est du même signe que  $\operatorname{sh}(x)$ , donc également du même signe que  $\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$ . On en déduit que :

$$\sin(\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x))) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}.$$

Ainsi, puisque

$$\sin(\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x))) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} \quad \text{et} \quad \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right],$$

et on en déduit

$$\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}\right).$$

- *Méthode 2.* On le démontrerait d'une deuxième manière en faisant l'étude de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbf{R}$  par

$$f(x) = \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)) - \operatorname{Arcsin}\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}\right).$$

### Éléments de correction - SVF 41

La fonction  $f$  est  $2\pi$ -périodique. Etudions la sur  $I = [0; 2\pi]$ . Elle est dérivable sur cet intervalle et pour tout  $x \in I$ ,

$$f'(x) = -3\sin(x)\cos^2(x) + 3\cos(x)\sin^2(x) = 3\sin(x)\cos(x)(\sin(x) - \cos(x)) = 3\sqrt{2}\sin(x)\cos(x)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Pour  $x \in I$ , on sait que :

$$\begin{aligned}\sin(x) > 0 &\iff x \in ]0; \pi[, \\ \cos(x) > 0 &\iff x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[ \cup \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right], \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0 &\iff x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right].\end{aligned}$$

On en déduit successivement le signe de  $f'$  sur  $I$ , les variations de  $f$  sur  $I$  et le nombre de solutions sur  $I$  de l'équation  $f(x) = 1$  : l'équation  $\cos^3(x) + \sin^3(x) = 1$  admet exactement trois solutions sur  $[0; 2\pi]$ , à savoir les nombres réels  $0$ ,  $\frac{\pi}{2}$  et  $2\pi$ .

### Éléments de correction - SVF 42

1. La fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbf{R}_+^*$ . Pour tout nombre réel  $x$  strictement positif,

$$f'(x) = \frac{x+1-\ln(x)}{x^2} \exp\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right).$$

2. En étudiant la fonction  $g$  définie sur  $\mathbf{R}_+^*$  par  $g(x) = 1+x-\ln(x)$ , on montre que  $\ln(x) \geq x+1$  pour tout nombre réel  $x$  strictement positif.
3. Par conséquent, la fonction  $f'$  est positive et la fonction  $f$  est croissante.
4. Calculons :  $f(1) = 1$  et  $f'(1) = 2$ . Ainsi la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse 1 a pour équation  $y = 2(x-1)$ .  
La limite en 0 de  $f$  est 0, la limite en  $+\infty$  de  $f$  est  $+\infty$ .

