
Savez-vous faire ?

Nombres complexes

Vous devez savoir résoudre une équation du second degré sur $\mathbf{C}$ (donc trouver les racines carrées d'un nombre complexe sous forme algébrique ou trigonométrique) et connaître les relations coefficients-racines, trouver les racines n -ièmes d'un nombre complexe dont on sait calculer une forme trigonométrique, connaître les formules d'Euler et savoir les utiliser pour linéariser ou factoriser une expression trigonométrique, connaître les interprétations en terme de mesure d'angle et de longueur de module et d'argument d'un point du plan complexe.

SVF 43. Donner les racines carrées des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 4 - i,$$

$$z_2 = \sqrt{3} + i,$$

$$z_3 = 2 - 5i.$$

SVF 44. Donner la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 + e^{-i\frac{\pi}{7}},$$

$$z_2 = -1 - e^{i\frac{\pi}{4}},$$

$$z_3 = e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{4}},$$

$$z_4 = 1 + e^{i\frac{\pi}{7}} + e^{2i\frac{\pi}{7}} + e^{3i\frac{\pi}{7}}.$$

SVF 45. Déterminer les racines n -ièmes des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1,$$

$$z_2 = -i,$$

$$z_3 = 5 - 5i,$$

$$z_4 = 1 + e^{i\frac{\pi}{5}},$$

$$z_5 = 1 - e^{i\frac{4\pi}{7}}.$$

SVF 46. Résoudre sur $\mathbf{C}$ les équations suivantes :

$$(1) \quad z^2 - 3z + 4 = 0$$

$$(3) \quad z^4 = 1 - i$$

$$(5) \quad z^4 + (3 + 2i)z^2 + 1 + 3i = 0$$

$$(7) \quad e^z = 2 - 2i$$

$$(9) \quad (z^3 - 1)^7 = 1$$

$$(2) \quad z^2 - (5 + 5i)z + 11i - 2 = 0$$

$$(4) \quad 1 + z^4 + z^8 = 0$$

$$(6) \quad (z - 1)^5 = (z + 1)^5$$

$$(8) \quad (e^z)^2 = -4 - 4\sqrt{3}i$$

$$(10) \quad (z^2 + 2)^2 = -1.$$

SVF 47. Linéariser les expressions

$$A = \cos^5(x), \quad B = \sin^5(x), \quad C = \cos^2(x) \sin^3(x).$$

SVF 48. Etablir la formule suivante, pour $x \in \mathbf{R}$: $\sin(6x) = 6 \cos^5(x) \sin(x) - 20 \cos^3(x) \sin^3(x) + 6 \cos(x) \sin^5(x)$.
Etablir une formule analogue pour $\cos(6x)$.

SVF 49. Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation

$$\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0.$$

SVF 50. Caractériser géométriquement les ensembles suivants :

$$E_1 = \left\{ z \in \mathbf{C} \mid |z - i| = \frac{3}{4} \right\}$$

$$E_3 = \left\{ z \in \mathbf{C} \mid |z - 4i| = |z - 2i| \right\}$$

$$E_5 = \left\{ z \in \mathbf{C} \setminus \{-1\} \mid \frac{z - 3i}{z + 1} \in \mathbf{R} \right\}$$

$$E_2 = \left\{ z \in \mathbf{C} \mid |(2 + i)z - 4i| = 1 \right\}$$

$$E_4 = \left\{ z \in \mathbf{C} \mid |z - 1| = |\bar{z} - 2i| \right\}$$

$$E_6 = \left\{ z \in \mathbf{C} \setminus \{-1\} \mid \frac{z - 3i}{z + 1} \in i\mathbf{R} \right\}.$$

SVF 51. Dans le plan complexe, on se donne les points $A = 1 + i$ et $B = 2 - i$. Comment choisir C pour que ABC soit un triangle équilatéral ?

SVF 52. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que le triangle de sommets z , z^2 et z^3 soit un triangle équilatéral.

Éléments de correction

Éléments de correction - SVF 43

- Les racines carrées de z_1 sont $\sqrt{\frac{4+\sqrt{17}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{17}-4}{2}}$ et $-\sqrt{\frac{4+\sqrt{17}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{17}-4}{2}}$.
- Les racines carrées de z_2 sont $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$ et $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$.
- Les racines carrées de z_3 sont $\sqrt{\frac{2+\sqrt{29}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{29}-2}{2}}$ et $-\sqrt{\frac{2+\sqrt{29}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{29}-2}{2}}$.

Éléments de correction - SVF 44

- $z_1 = 2 \cos(\frac{\pi}{14})e^{-i\frac{\pi}{14}}$.
- $z_2 = 2 \cos(\frac{\pi}{8})e^{-i\frac{7\pi}{8}}$.
- $z_3 = 2 \sin(\frac{\pi}{24})e^{-i\frac{5\pi}{24}}$.
- $z_4 = \frac{\sin(\frac{2\pi}{7})}{\sin(\frac{\pi}{14})}e^{i\frac{3\pi}{14}}$.

Éléments de correction - SVF 45

- Les racines n -ièmes de z_1 sont les n nombres complexes $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.
- Les racines n -ièmes de z_2 sont les n nombres complexes $e^{i(\frac{-\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n})}$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.
- Les racines n -ièmes de z_3 sont les n nombres complexes $(5\sqrt{2})^{\frac{1}{n}}e^{i(-\frac{\pi}{4n} + \frac{2k\pi}{n})}$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.
- Le nombre complexe z_4 pour forme trigonométrique $2\cos(\frac{\pi}{10})e^{i\frac{\pi}{10}}$. Ses racines n -ièmes sont donc les n nombres complexes $(2\cos(\frac{\pi}{10}))^{\frac{1}{n}}e^{i(\frac{\pi}{10n} + \frac{2k\pi}{n})}$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.
- Le nombre complexe z_5 pour forme trigonométrique $2\sin(\frac{2\pi}{7})e^{-i\frac{3\pi}{14}}$. Ses racines n -ièmes sont donc les n nombres complexes $(2\sin(\frac{2\pi}{7}))^{\frac{1}{n}}e^{i(-\frac{3\pi}{14n} + \frac{2k\pi}{n})}$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Éléments de correction - SVF 46

- (1) Les solutions sont $\frac{3+i\sqrt{7}}{2}$ et $\frac{3-i\sqrt{7}}{2}$.
- (2) Le discriminant du trinôme est $8-6i = (3+i)^2$. Par conséquent, les solutions de l'équation sont $1+2i$ et $4+3i$.
- (3) Les solutions sont les racines quatrièmes de $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, à savoir les nombres complexes du type $2^{\frac{1}{8}}e^{i(\frac{-\pi}{16} + \frac{k\pi}{2})}$, avec $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$.
- (4) Soit $z \in \mathbf{C}$. Alors : $1+z^4+z^8=0$ si et seulement si z^4 est racine du trinôme X^2+X+1 si et seulement si $z^4 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ou $z^4 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. Par conséquent, les solutions de l'équation (4) sont les racines quatrièmes du nombre complexe $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et les racines quatrièmes du nombre $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. Ce sont donc les nombres complexes du type $e^{i(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{4})}$ et $e^{i(-\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{4})}$, avec $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$.
- (5) Soit $z \in \mathbf{C}$. Alors $z^4 + (3+2i)z^2 + 1 + 3i = 0$ si et seulement si z^2 est racine du trinôme $X^2 + (3+2i)X + 1 + 3i$. Les racines de ce trinôme sont $-1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$ et $-2-i = (\sqrt{\frac{-2+\sqrt{5}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}})$. Les solutions de l'équation (5) sont donc les quatre nombres complexes

$$2^{\frac{1}{4}}e^{-i\frac{3\pi}{8}}, \quad 2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{3\pi}{8}}, \quad \sqrt{\frac{-2+\sqrt{5}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}, \quad -\sqrt{\frac{-2+\sqrt{5}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}.$$

- (6) On vérifie que -1 n'est pas solution de l'équation (6). Soit $z \in \mathbf{C} \setminus \{-1\}$. Alors $(z-1)^5 = (z+1)^5$ si et seulement si $\frac{z-1}{z+1}$ est une racine cinquième de l'unité, i.e. un nombre complexe du type $e^{i\frac{2\pi}{5}}$, $k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$. L'ensemble des solutions de (6) est donc :

$$\left\{ \frac{1 + e^{i\frac{k\pi}{5}}}{1 - e^{i\frac{k\pi}{5}}} : k \in \mathbf{Z} \right\} = \left\{ i \frac{\cos(\frac{k\pi}{10})}{\sin(\frac{k\pi}{10})} : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

- (7) L'ensemble des solutions est $\{\frac{3}{2}\ln(2) + i(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi) : k \in \mathbf{Z}\}$.

- (8) L'ensemble des solutions est $\left\{ \frac{3}{2} \ln(2) + i\left(-\frac{\pi}{3} + k\pi\right) : k \in \mathbf{Z} \right\}$.
- (9) L'ensemble des solutions est $\left\{ \left(2 \cos\left(\frac{k\pi}{7}\right)\right)^{\frac{1}{3}} e^{i\left(\frac{k\pi}{21} + \frac{2\pi}{3}\right)} : (k, l) \in \llbracket -3, 3 \rrbracket \times \llbracket 0, 2 \rrbracket \right\}$.
- (10) Les solutions de l'équation sont les quatre nombres complexes

$$\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}, \quad -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}, \quad \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}, \quad -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}.$$

Éléments de correction - SVF 47

On utilise les formules d'Euler puis la formule du binôme de Newton pour développer les puissances (et, pour l'expression de C , on développe le produit obtenu, ou on utilise la formule $\cos^2 = 1 - \sin^2$). On obtient :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{16}(\cos(5x) + 5\cos(3x) + 10\cos(x)) \\ B &= \frac{1}{16}(\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin(x)) \\ C &= \frac{1}{16}(2\sin(x) + \sin(3x) - 5\sin(5x)). \end{aligned}$$

Éléments de correction - SVF 48

Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} e^{6ix} &= (e^{ix})^6 \\ &= (\cos(x) + i\sin(x))^6 \\ &= \cos^6(x) + 6i\cos^5(x)\sin(x) - 15\cos^4(x)\sin^2(x) - 20i\cos^3(x)\sin^3(x) \\ &\quad + 15\cos^2(x)\sin^4(x) + 6i\cos(x)\sin^5(x) - \sin^6(x). \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient la formule cherchée en remarquant que $\sin(6x) = \Im(e^{6ix})$. De plus,

$$\cos(6x) = \Re(e^{6ix}) = \cos^6(x) - 15\cos^4(x)\sin^2(x) + 15\cos^2(x)\sin^4(x) - \sin^6(x).$$

Éléments de correction - SVF 49

Soit x un nombre réel. On remarque que

$$\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = \Im(e^{ix} + e^{2ix} + e^{3ix}).$$

Si $e^{ix} = 1$, *i.e.* si $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$, alors x n'est pas solution de l'équation.

Supposons donc à présent que $e^{ix} \neq 1$. Par la formule de la série géométrique,

$$e^{ix} + e^{2ix} + e^{3ix} = e^{ix} \frac{1 - e^{3ix}}{1 - e^{ix}}.$$

On en déduit que

$$\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = \sin(2x) \frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Ainsi, x est solution de l'équation si et seulement si $\sin(2x) = 0$ ou $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0$.

On en déduit que l'ensemble des solutions est

$$\left\{ \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbf{Z} \right\} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbf{Z}\}.$$

Éléments de correction - SVF 50

1. E_1 est le cercle de centre i et de rayon $\frac{3}{4}$.
2. E_2 est le cercle de centre $\frac{4+8i}{5}$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{5}}$.
3. E_3 est la médiatrice du segment $[AB]$, où A désigne le point d'affixe $4i$ et B le point d'affixe $2i$.
4. E_4 est la médiatrice du segment $[AB]$, où A désigne le point d'affixe 1 et B le point d'affixe $-2i$.
5. E_5 est la droite (AB) privée du point A , où A désigne le point d'affixe -1 , B le point d'affixe $3i$.
6. E_6 est le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point A , où A désigne le point d'affixe -1 et B le point d'affixe $3i$.

Éléments de correction - SVF 51

Soit C un point du plan complexe. Notons a , b et c les affixes des points A , B et C . Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si C est l'image de B par la rotation de centre A et de mesure d'angle $\frac{\pi}{3}$ ou $-\frac{\pi}{3}$.
Donc ABC est équilatéral si et seulement si

$$c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a) \text{ ou } c - a = e^{-i\frac{\pi}{3}}(b - a).$$

Par conséquent, ABC est équilatéral si et seulement si

$$c = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ ou } c = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{2} + \frac{4 - \sqrt{3}}{2}i.$$

Éléments de correction - SVF 52

Soit $z \in \mathbb{C}$. Le triangle de sommets z , z^2 , z^3 est équilatéral si et seulement si

$$z^3 - z = e^{i\frac{\pi}{3}}(z^2 - z) \text{ ou } z^3 - z = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z^2 - z).$$

Après résolution de ces deux équations (en factorisant par z et $(z - 1)$), on en déduit que le triangle de sommets z , z^2 , z^3 est équilatéral si et seulement si

$$z = 0 \quad \text{ou} \quad z = 1 \quad \text{ou} \quad z = e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 \quad \text{ou} \quad z = e^{-i\frac{\pi}{3}} - 1.$$