
Savez-vous faire ?

Calculs de primitives

Pour calculer une primitive, vous pouvez essayer de reconnaître la dérivée d'une fonction usuelle, en identifiant tout d'abord le type de fonction à primitiver (est-ce un produit ? si oui, est-il du type $u' \cos(u)$, $u' u^n, \dots$ un quotient ? si oui, est-il du type $\frac{u'}{u}$, $\frac{u'}{u^n}$, $\dots$).

Vous devez aussi savoir calculer les primitives du type :

$$x \mapsto \cos^n(ax) \sin^p(bx), \quad x \mapsto \cos(ax) e^{bx}, \quad x \mapsto \sin(ax) e^{bx}, \quad x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}.$$

Vérifiez que vous connaissez la méthode à adopter pour chacune de ces fonctions.

Enfin, vous devez savoir faire des changements de variables ou des intégrations par parties.

SVF 53. Déterminer une primitive de chacune des fonctions de la colonne de gauche. Dans la colonne de droite, on a indiqué les différents types de fonctions à identifier. Vous pourrez donc, si vous le souhaitez, commencer par chercher le type de la fonction avant d'en déterminer une primitive.

(1) $f_1 : x \mapsto 5x \exp(x^2 + 1)$	(a) $u' \sin(u)$
(2) $f_2 : x \mapsto \frac{4}{x^5}$	(b) $u' \exp(u)$
(3) $f_3 : x \mapsto x^3 \cos(x^4)$	(c) $\frac{u'}{u}$
(4) $f_4 : x \mapsto \frac{x-3}{x^2-6x+7}$	(d) $u' \cos(u)$
(5) $f_5 : x \mapsto \cos(x) \sin^4(x)$	(e) $u' u^n$
(6) $f_6 : x \mapsto e^{3x} \sin(\exp(3x))$	(f) $\frac{u'}{u^n}$
(7) $f_7 : x \mapsto \frac{3x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x^3 - x^2 + x + 6}}$	(g) $\frac{u'}{\sqrt{u}}$

SVF 54. Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes.

$f_1 : x \mapsto \frac{x^2}{\sqrt{x^3+4}}$	$f_2 : x \mapsto \frac{\tan(x)}{\cos^2(x)}$	$f_3 : x \mapsto \frac{1}{x(1+\ln^2(3x))}$
$f_4 : x \mapsto \sin(2x) \cos^5(2x)$	$f_5 : x \mapsto \frac{3 \ln(2x)}{x}$	$f_6 : x \mapsto \frac{2x}{\sqrt{3x^2+4}}$
$f_7 : x \mapsto \frac{2}{x^2-4x+3}$	$f_8 : x \mapsto \frac{x-6}{x^2-4x+3}$	$f_9 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$
$f_{10} : x \mapsto \cos^3(x) \sin(x)$	$f_{11} : x \mapsto \cos(3x) e^{2x}$	$f_{12} : x \mapsto \frac{1}{x^2+x+1}$
$f_{13} : x \mapsto \frac{2}{x^2+4x+4}$	$f_{14} : x \mapsto \sin^2(2x) \cos^2(x)$	$f_{15} : x \mapsto 3 \sin(2x) e^{\cos(2x)}$

SVF 55. A l'aide d'une ou plusieurs intégrations par parties, déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \ln(1+x^2) \quad f_2 : x \mapsto (x^2+2x+3)e^{3x} \quad f_3 : x \mapsto \frac{x}{\cos^2(x)}.$$

Pour la première fonction, on pourra remarquer que $\frac{x^2}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

SVF 56. 1. A l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive de la fonction $f : x \mapsto (1-x)\sqrt{1+x}$ sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$.

2. En déduire, à l'aide du changement de variable $u = \sin(t)$, une primitive de la fonction

$$g : x \mapsto \frac{\cos^3(x)}{\sqrt{1+\sin(x)}},$$

sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$.

SVF 57. A l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t}$, déterminer une primitive sur $\mathbf{R}_+^*$ de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{(2+x)\sqrt{x}}.$$

SVF 58. A l'aide du changement de variable $u = t^2$, déterminer une primitive sur $\mathbf{R}_+^*$ de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{x(1+x^2)}.$$

SVF 59. 1. Donner la forme canonique du trinôme $(6-X)X$.

2. A l'aide du changement de variable $u = \frac{t}{3} - 1$, déterminer alors une primitive sur l'intervalle $]0 ; 6[$ de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{(6-x)x}}.$$

Éléments de correction

Éléments de correction - SVF 53

- (1) Pour $u : x \mapsto x^2 + 1$, on a $f_1 = \frac{5}{2}u'e^u$. Ainsi une primitive de f_1 est $x \mapsto \frac{5e^{x^2+1}}{2}$.
- (2) Pour $u : x \mapsto x$, on a $f_2 = 4\frac{u'}{u^5}$. Il s'ensuit qu'une primitive f_2 est $x \mapsto -\frac{1}{x^4}$.
- (3) Pour $u : x \mapsto x^4$, on a $f_3 = \frac{1}{4}u'\cos(u)$. On en déduit qu'une primitive de f_3 est $x \mapsto \frac{1}{4}\sin(x^4)$.
- (4) Pour $u : x \mapsto x^2 - 6x + 7$, on a $f_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{u'}{u}$, donc une primitive de f_4 est $x \mapsto \frac{1}{2}\ln(|x^2 - 6x + 7|)$.
- (5) Pour $u : x \mapsto \sin(x)$, on a $f_5 = u'u^4$, d'où une primitive de $f_5 : x \mapsto \frac{1}{5}\sin(x)^5$.
- (6) Pour $u : x \mapsto e^{3x}$, on a $f_6 = \frac{1}{3}\sin(u)$. On obtient alors une primitive de f_6 avec $x \mapsto -\frac{1}{3}\cos(e^{3x})$.
- (7) Pour $u : x \mapsto x^3 - x^2 + x + 6$, on a $f_7 = \frac{u'}{\sqrt{u}}$. Ainsi une primitive de f_7 est $x \mapsto 2\sqrt{x^3 - x^2 + x + 6}$.

Éléments de correction - SVF 54

Pour tout $i \in \llbracket 1, 15 \rrbracket$, une primitive de la fonction f_i est donnée par la fonction F_i suivantes :

$$\begin{array}{lll} F_1 : x \mapsto \frac{2}{3}\sqrt{x^3+4} & F_2 : x \mapsto \frac{1}{2}\tan^2(x) & F_3 : x \mapsto \operatorname{Arctan}(\ln(3x)) \\ F_4 : x \mapsto -\frac{1}{12}\cos^6(2x) & F_5 : x \mapsto \frac{3}{2}(\ln(2x))^2 & F_6 : x \mapsto \frac{2}{3}\sqrt{3x^2+4} \\ F_7 : x \mapsto \ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right| & F_8 : x \mapsto \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+3| - 2\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right| & F_9 : x \mapsto \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right) \\ F_{10} : x \mapsto -\frac{1}{4}\cos^4(x) & F_{11} : x \mapsto \frac{e^{2x}}{13}(2\cos(3x) + 3\sin(3x)) & F_{12} : x \mapsto \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) \\ F_{13} : x \mapsto -\frac{2}{x+2} & F_{14} : x \mapsto -\frac{\sin(6x)}{48} + \frac{\sin(2x)}{16} - \frac{\sin(4x)}{16} + \frac{x}{4} & F_{15} : x \mapsto -\frac{3}{2}e^{\cos(2x)}. \end{array}$$

Éléments de correction - SVF 55

1. Soit $x \in \mathbf{R}$. Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \ln(1+t^2)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment d'extrémités 0 et x . Par intégration par parties, on obtient alors :

$$\int_0^x \ln(1+t^2) dt = \left[t \ln(1+t^2) \right]_0^x - 2 \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt = x \ln(1+x^2) - 2 \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t^2} \right) dt = x \ln(1+x^2) - 2(x - \operatorname{Arctan}(x)).$$

Par conséquent, une primitive de la fonction f_1 est la fonction

$$F_1 : x \mapsto x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \operatorname{Arctan}(x).$$

2. En effectuant deux intégrations par parties successives (en dérivant le polynôme et en intégrant l'exponentielle), on obtient une primitive de la fonction f_2 : il s'agit de la fonction

$$F_2 : x \mapsto \frac{e^{3x}}{27}(9x^2 + 12x + 23).$$

3. Une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\cos^2(t)}$ est la fonction tangente. Par intégration par parties, on en déduit qu'une primitive de la fonction f_3 est

$$F_3 : x \mapsto x \tan(x) + \ln|\cos(x)|.$$

Éléments de correction - SVF 56

1. Soit $x \in]-1; +\infty[$. Les fonctions $t \mapsto (1-t)$ et $t \mapsto \frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment d'extrémités 0 et x . Par intégration par parties, on obtient alors

$$\int_0^x f(t) dt = \left[\frac{2}{3}(1-t)(1+t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^x + \frac{2}{3} \int_0^x (1+t)^{\frac{3}{2}} dt.$$

Par conséquent, une primitive de la fonction f sur l'intervalle $] -1; +\infty[$ est la fonction

$$x \mapsto \frac{2}{3}(1-x)(1+x)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{15}(1+x)^{\frac{5}{2}}.$$

2. Soit $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. La fonction $\varphi : t \mapsto \sin(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment d'extrémités 0 et x . En faisant le changement de variables $u = \sin(t)$, on obtient alors :

$$\int_0^x g(t) dt = \int_0^x \frac{1 - \sin^2(t)}{\sqrt{1 + \sin(t)}} \cos(t) dt = \int_0^{\sin(x)} \frac{1 - u^2}{\sqrt{1 + u}} du = \int_0^{\sin(x)} (1 - u) \sqrt{1 + u} du.$$

Par conséquent, une primitive de la fonction g sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ est la fonction

$$G : x \mapsto \frac{2}{3}(1 - \sin(x))(1 + \sin(x))^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{15}(1 + \sin(x))^{\frac{5}{2}}.$$

Éléments de correction - SVF 57

Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$. La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment d'extrémités 1 et x . En faisant le changement de variable $u = \sqrt{t}$, on obtient

$$\int_1^x f(t) dt = \int_1^x \frac{2}{2 + \sqrt{t}^2} \cdot \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{2 du}{2 + u^2} = \left[\sqrt{2} \operatorname{Arctan} \left(\frac{u}{\sqrt{2}} \right) \right]_0^{\sqrt{x}}.$$

Par conséquent, une primitive sur $\mathbf{R}_+^*$ de la fonction f est la fonction

$$F : x \mapsto \sqrt{2} \operatorname{Arctan} \left(\sqrt{\frac{x}{2}} \right).$$

Éléments de correction - SVF 58

Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$. La fonction $t \mapsto t^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment d'extrémités 1 et x . En faisant le changement de variable $u = t^2$, on obtient

$$\int_1^x f(t) dt = \int_1^x \frac{2t}{2t^2(1+t^2)} dt = \int_1^{x^2} \frac{du}{2u(1+u)} = \frac{1}{2} \int_1^{x^2} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u} \right) du.$$

Par conséquent, une primitive de la fonction f sur $\mathbf{R}_+^*$ est la fonction

$$F : x \mapsto \frac{1}{2} (\ln |x^2| - \ln |1 + x^2|).$$

Éléments de correction - SVF 59

1. On obtient

$$P = -(X^2 - 6X) = -((X - 3)^2 - 9) = 9 - (X - 3)^2.$$

2. Soit $x \in]0; 6[$. La fonction $t \mapsto \frac{t}{3} - 1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment d'extrémités 3 et x . En faisant le changement de variables $u = \frac{t}{3} - 1$, on en déduit

$$\int_3^x f(t) dt = \int_3^x \frac{dt}{3\sqrt{1 - (\frac{t}{3} - 1)^2}} = \int_0^{\frac{x}{3} - 1} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

On en déduit qu'une primitive de f sur $]0; 6[$ est la fonction

$$F : x \mapsto \operatorname{Arcsin} \left(\frac{x}{3} - 1 \right).$$