
Savez-vous faire ?

Equations différentielles

Vous devez connaître la méthode permettant de résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 du type $y' + a(t)y = f(t)$. En particulier, vous devez connaître la méthode de la variation de la constante pour déterminer une solution particulière de cette équation, si nécessaire (pensez toujours à vérifier qu'il n'y a pas de solution particulière évidente).

Vous devez connaître les ensembles de solutions d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants. Vérifiez que vous connaissez ces ensembles pour des fonctions inconnues à valeurs complexes, et pour des fonctions inconnues à valeurs réelles. Vous devez enfin pouvoir déterminer une solution particulière d'une équation du type $y'' + ay' + b = c(x)$, quand le second membre est du type $c(x) = \lambda e^{dx}$, ou que l'on peut s'y ramener (rappelons que les fonctions cosinus et sinus s'interprètent comme la partie réelle ou la partie imaginaire d'une exponentielle complexe, et que le principe de superposition permet de décomposer la recherche de la solution particulière quand le second membre est une somme).

SVF 60. Résoudre sur $\mathbf{R}$ les équations différentielles suivantes (on donnera les solutions à valeurs réelles) :

$$(1) \quad y' + x^2y = 3e^{-\frac{x^3}{3}} \qquad (2) \quad (1 + x^2)y' + xy + x = 0.$$

SVF 61. Résoudre sur $\mathbf{R}$ les équations suivantes (on donnera les solutions à valeurs réelles) :

$$\begin{array}{ll} (1) \quad y'' + 2y' - 3y = 5e^{2x} & (2) \quad y'' + 2y' - 3y = 8e^x \\ (3) \quad y'' + 2y' - 3y = 5e^{2x} + 8e^x & (4) \quad y'' + 2y' - 3y = \cos(x) \\ (5) \quad y'' + 9y = \sin(3x) & (6) \quad y'' - 4y' + 4y = 3\cos(x)e^{2x}. \end{array}$$

SVF 62. Décrivez la méthode à adopter pour résoudre chacune des équations différentielles suivantes :

$$\begin{array}{ll} (1) \quad y'' - 2y' + y = \cos(x) & (2) \quad y'' + 2y' - y = \cos^2(x) \\ (3) \quad y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sh}(x) & (4) \quad y'' - 2y' + 5y = \cos(2x)e^x. \end{array}$$

SVF 63. Déterminer l'ensemble des fonctions x et y définies sur $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$ vérifiant

$$\begin{cases} x' - x &= y \\ y' + y &= 3x \end{cases}$$

SVF 64. Déterminer l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbf{R}_+^*$ et à valeurs strictement positives solutions de l'équation différentielle

$$(1) \quad xy' + y = xy^3.$$

On pourra, en justifiant, poser $z = \frac{1}{y^2}$ et se ramener à une équation différentielle plus simple en z .

SVF 65. On cherche à résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle

$$(1) \quad y'' - y' - e^{2x}y = e^{3x}.$$

Déterminer les solutions de cette équation à l'aide du changement de variable $t = e^x$.

Éléments de correction

Éléments de correction - SVF 60

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1) est

$$\left\{ x \mapsto (3x + A)e^{-\frac{x^3}{3}} : A \in \mathbf{R} \right\},$$

et celui de l'équation (2) est

$$\left\{ x \mapsto \frac{A}{\sqrt{1+x^2}} - 1 : A \in \mathbf{R} \right\}.$$

Éléments de correction - SVF 61

Pour tout $i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$, on note $\mathcal{S}_i$ l'ensemble des solutions de l'équation (i). Alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1 &= \{x \mapsto Ae^{-3x} + Be^x + e^{2x} : (A, B) \in \mathbf{R}^2\} \\ \mathcal{S}_2 &= \{x \mapsto Ae^{-3x} + (B + 2x)e^x : (A, B) \in \mathbf{R}^2\} \\ \mathcal{S}_3 &= \{x \mapsto Ae^{-3x} + (B + 2x)e^x + e^{2x} : (A, B) \in \mathbf{R}^2\} \\ \mathcal{S}_4 &= \{x \mapsto Ae^{-3x} + Be^x - \frac{1}{5}\cos(x) + \frac{1}{10}\sin(x) : (A, B) \in \mathbf{R}^2\} \\ \mathcal{S}_5 &= \{x \mapsto (A - \frac{x}{6})\cos(3x) + B\sin(3x) : (A, B) \in \mathbf{R}^2\} \\ \mathcal{S}_6 &= \{x \mapsto (A + Bx - 3\cos(x))e^{2x} : (A, B) \in \mathbf{R}^2\}\end{aligned}$$

Éléments de correction - SVF 62

(1) Si y_p désigne une solution particulière de (1), l'ensemble des solutions de (1) est

$$\{x \mapsto (A + Bx)e^x + y_p(x) : (A, B) \in \mathbf{R}^2\}.$$

Une solution particulière de (1) sera donnée par la partie réelle d'une solution particulière de l'équation différentielle

$$z'' - 2z' + z = e^{ix}.$$

(2) Si y_p désigne une solution particulière de (2), l'ensemble des solutions de (2) est

$$\{x \mapsto Ae^{(-1+\sqrt{2})x} + Be^{(-1-\sqrt{2})x} + y_p(x) : (A, B) \in \mathbf{R}^2\}.$$

Remarquons que l'équation (2) s'écrit encore

$$y'' + 2y' - y = \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{1}{2}.$$

On en déduit qu'une solution particulière de (2) est donnée par la somme (cf. principe de superposition) d'une solution particulière de

$$y'' + 2y' - y = \frac{\cos(2x)}{2},$$

(qui est elle-même la partie réelle d'une solution particulière de $z'' + 2z' - z = \frac{1}{2}e^{2ix}$, que l'on cherche sous la forme $x \mapsto ae^{2ix}$ avec $a \in \mathbf{C}$) et d'une solution particulière de

$$y'' + 2y' - y = \frac{1}{2},$$

(qui possède une solution évidente, à savoir la fonction constante $x \mapsto -\frac{1}{2}$).

(3) L'équation (3) s'écrit encore

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2}.$$

Notons y_p une solution particulière de (3). Alors l'ensemble des solutions de l'équation (3) est

$$\{x \mapsto Ae^{-x} + Be^{-2x} + y_p(x) : (A, B) \in \mathbf{R}^2\}$$

La fonction y_p peut s'obtenir comme somme d'une solution particulière de

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{e^x}{2}$$

(qu'on cherche sous la forme $x \mapsto ae^x$, avec $a \in \mathbf{R}$) et d'une solution particulière de

$$y'' + 3y' + 2y = -\frac{e^{-x}}{2}$$

(qu'on cherche sous la forme $x \mapsto bxe^{-x}$, avec $b \in \mathbf{R}$).

(4) Notons y_p une solution particulière de l'équation (4). L'ensemble des solutions de (4) s'écrit alors

$$\{x \mapsto e^x(A \cos(2x) + B \sin(2x)) + y_p(x) : (A, B) \in \mathbf{R}^2\}.$$

La fonction y_p peut être trouvée comme étant la partie réelle d'une solution particulière de l'équation

$$z'' - 2z' + 5z = e^{(2i+1)x},$$

solution particulière que l'on cherchera sous la forme $x \mapsto axe^{(2i+1)x}$, avec $a \in \mathbf{C}$.

Éléments de correction - SVF 63

Supposons que x et y soient deux fonctions solutions du problème posé. Alors x et y sont dérivables sur $\mathbf{R}$ et $x' = x + y$, $y' = 3x - y$. Les fonctions $x + y$ et $3x - y$ sont dérivables, donc les fonctions x' et y' sont dérivable et on obtient

$$x'' + x' + y' = (x + y) + (3x - y) = 4x \quad \text{et} \quad y'' = 3x' - y' = 3(x + y) - (3x - y) = 4y.$$

On en déduit que x et y sont des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficient constant

$$f'' - 4f = 0.$$

Par conséquent, il existe des constantes A_0, B_0, A_1 et B_1 telles que

$$x : t \mapsto A_0 e^{2t} + B_0 e^{-2t} \quad \text{et} \quad y : t \mapsto A_1 e^{2t} + B_1 e^{-2t}.$$

Or $x' - x = y$, donc pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$A_0 e^{2t} - 3B_0 e^{-2t} = A_1 e^{2t} + B_1 e^{-2t} \text{ ou encore } (A_0 - A_1) e^{2t} = (B_1 + 3B_0) e^{-2t}.$$

Par passage à la limite en $+\infty$ et en $-\infty$, on en déduit que $A_0 = A_1$ et que $B_1 = -3B_0$.

Donc si x et y sont deux solutions du problème posé, il existe deux constantes A et B telles que

$$x : t \mapsto Ae^{2t} + Be^{-2t} \quad \text{et} \quad y : t \mapsto Ae^{2t} - 3Be^{-2t}.$$

Réciproquement, on vérifie aisément que les fonctions x et y de ce type sont solutions du problème posé.

Finalement, les solutions du problème posé sont les fonctions du type

$$x : t \mapsto Ae^{2t} + Be^{-2t} \quad \text{et} \quad y : t \mapsto Ae^{2t} - 3Be^{-2t}.$$

avec A et B deux nombres réels.

Éléments de correction - SVF 64

Soit y une fonction définie et dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$. Supposons que y soit à valeurs strictement positives. Alors y ne s'annulant pas, la fonction $z = \frac{1}{y^2}$ est correctement définie sur $\mathbf{R}_+^*$.

Cette fonction est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et $z' = -\frac{2y'}{y^3}$. Alors :

$$xy' + y = xy^3 \iff \frac{xy'}{y^3} + \frac{1}{y^2} = x \iff z - \frac{x}{2}z' = x \iff z' - \frac{2}{x}z = -2.$$

Or les fonctions solutions de l'équation différentielle

$$(2) \quad f' - \frac{2}{x}f = -2$$

sont les fonctions du type $x \mapsto Ax^2 + 2x$, avec $A \in \mathbf{R}$. Donc :

$$\begin{aligned} xy' + y = xy^3 &\iff \exists A \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}_+^*, \frac{1}{y^2} = x(Ax + 2) \\ &\iff \exists A \in \mathbf{R}_+, \forall x \in \mathbf{R}_+^*, \frac{1}{y^2} = x(Ax + 2) \\ &\iff \exists A \in \mathbf{R}_+, \forall x \in \mathbf{R}_+^*, y = \frac{1}{\sqrt{x(Ax + 2)}}. \end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions est (1) est :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R}_+^* \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{x(Ax+2)}} \end{array} : A \in \mathbf{R}_+ \right\}.$$

Éléments de correction - SVF 65

Soit z une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$. Posons $\varphi : t \mapsto z(\ln t)$. Alors φ est définie et deux fois dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et, pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$,

$$\varphi'(t) = \frac{1}{t}z'(\ln t) \quad \text{et} \quad \varphi''(t) = \frac{1}{t^2}(z''(\ln t) - z'(\ln t)).$$

La fonction z est solution de l'équation différentielle (1) sur $\mathbf{R}$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $z''(x) - z'(x) - e^{2x}z(x) = e^{3x}$.

Or, pour tout $x \in \mathbf{R}$, il existe $t \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $x = \ln(t)$.

Donc z est solution de l'équation différentielle (1) sur $\mathbf{R}$ si et seulement si pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$,

$$z''(\ln t) - z'(\ln t) - t^2 z(\ln t) = t^3.$$

On en déduit que z est solution sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle (1) si et seulement si la fonction φ est solution sur $\mathbf{R}_+^*$ de l'équation différentielle

$$(2) \quad y'' - y = t.$$

Les solutions de l'équation (2) sont les fonctions du type $t \mapsto Ae^t + Be^{-t} - t$, avec $A, B \in \mathbf{R}$.

Donc les solutions sur $\mathbf{R}$ de l'équation (1) sont les fonctions du type

$$x \mapsto Ae^{\exp(x)} + Be^{-\exp(x)} - \exp(x),$$

avec $(A, B) \in \mathbf{R}^2$.