
Savez-vous faire ?

Ensembles et applications

Dans ce cours, il est indispensable de connaître avec précision les différentes définitions données. Les raisonnements menés doivent être clairs et rigoureux. Il faut également avoir en tête des schémas de preuve.

On rappelle ci-dessous quelques définitions et des schémas de preuve. On considère quatre ensembles A, B, E, F , ainsi qu'une application f de E dans F .

1. On dit que A est **inclus dans** B si et seulement si tout élément de A appartient à B .

Schéma de preuve. On veut montrer que $A \subset B$. Soit $x \in A$.

[raisonnement]

On en déduit que $x \in B$.

On vient d'établir que $A \subset B$.

2. On dit que A est **égal à** B si et seulement si A est inclus dans B et B est inclus dans A .

Pour montrer que $A = B$, il suffit donc de montrer que $A \subset B$ et que $B \subset A$, ce qu'on fait en utilisant le schéma de preuve précédent. Finalement, la double inclusion établit l'égalité des ensembles : $A = B$.

3. On dit que f est **injective** si et seulement si tout élément de F admet au plus un antécédent par f .

- (a) *Première méthode. On veut montrer que f est injective. Soient x et x' éléments de E tels que $f(x) = f(x')$.*

[raisonnement]

On en déduit que $x = x'$.

On vient de montrer que tout élément de F admet au plus un antécédent par f , donc f est une application injective.

- (b) *Seconde méthode. Soit $y \in F$. Résolvons l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$.*

[résolution de l'équation]

L'équation admet donc au plus une solution.

Finalement, tout élément de F admet au plus un antécédent par f , donc f est une application injective.

4. On dit que f est **surjective** si et seulement si tout élément de F admet au moins un antécédent par f .

- (a) *Première méthode. On veut montrer que f est surjective. Soit $y \in F$.*

[raisonnement]

On en déduit qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

On vient de montrer que tout élément de F admet au moins un antécédent par f , donc f est une application surjective.

- (b) *Seconde méthode. Soit $y \in F$. Résolvons l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$.*

[résolution de l'équation]

L'équation admet donc au moins une solution.

Finalement, tout élément de F admet au moins un antécédent par f , donc f est une application surjective.

5. On dit que f est **bijjective** si et seulement si tout élément de F admet exactement un antécédent par f .

- (a) *Première méthode. On montre successivement que f est injective et surjective en utilisant les schémas de preuve précédents.*

- (b) *Deuxième méthode. Soit $y \in F$. Résolvons l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$.*

[résolution de l'équation]

L'équation admet donc exactement une solution.

Finalement, tout élément de F admet exactement un antécédent par f , donc f est une application bijective.

- (c) *Troisième méthode. Si on arrive à déterminer directement une application que l'on pense être la réciproque de f , on introduit celle-ci, que l'on note g par exemple (ne surtout pas la noter f^{-1} tant qu'on n'a pas prouvé que f est bijective) et on vérifie que $f \circ g = \text{Id}_F$ et que $g \circ f = \text{Id}_E$.*

SVF 66. On introduit l'ensemble $A = \{1; 2; 3\}$.

1. Décrire l'ensemble $\mathcal{P}(A)$.
2. Compléter les assertions suivantes, en utilisant le symbole $\in$ ou le symbole $\subset$.

$$1 \dots A \quad \{1\} \dots \mathcal{P}(A) \quad \{1, 2\} \dots A \quad \{\{1\}; \{2\}\} \dots \mathcal{P}(A).$$

SVF 67. Soient A , B et C trois parties d'un ensemble E . Montrer que si $A \cup B = B \cap C$, alors $A \subset B \subset C$.

SVF 68. Soient A , B et C trois parties d'un ensemble E . Montrer que si $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$, alors $B = C$.

SVF 69. Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F . Soient A une partie de E et B une partie de F .

1. Rappeler la définition de l'image directe de A par f et de l'image réciproque de B par f .
2. Montrer que

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \quad \text{et} \quad f(f^{-1}(B)) \subset B.$$

3. Soit C une partie de F . On suppose que $B \subset C$. Montrer que $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(C)$.

SVF 70. Soient E , F et G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G . Démontrer les résultats suivants (démontrés dans le cours) :

1. Si f et g sont injectives, alors l'application $g \circ f$ est injective.
2. Si f et g sont surjectives, alors l'application $g \circ f$ est surjective.
3. Si f et g sont bijectives, alors l'application $g \circ f$ est bijective.

SVF 71. On considère l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & z^2 \end{array}$$

Cette application est-elle injective ? surjective ? bijective ?

SVF 72. On considère l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} \setminus \{-3i\} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \frac{2iz-1}{z+3i} \end{array}$$

1. Cette application est-elle injective ? surjective ?
2. Déterminer $f(\mathbf{C} \setminus \{-3i\})$.
3. Montrer que l'application

$$\tilde{f} : \mathbf{C} \setminus \{-3i\} \longrightarrow f(\mathbf{C} \setminus \{-3i\})$$
$$z \longmapsto \frac{2iz-1}{z+3i}$$

est bijective et déterminer son application réciproque.

Éléments de correction

Éléments de correction - SVF 66

1. $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1, 2\}; \{1, 3\}; \{2, 3\}; \{1, 2, 3\}\}.$
2. $1 \in A \quad \{1\} \in \mathcal{P}(A) \quad \{1, 2\} \subset A \quad \{\{1\}; \{2\}\} \subset \mathcal{P}(A).$

Éléments de correction - SVF 67

Supposons que $A \cup B = B \cap C$.

Montrons que $A \subset B$. Soit $x \in A$. Alors $x \in A \cup B$. Or $A \cup B = B \cap C$, donc $x \in B \cap C$. En particulier, $x \in B$. On vient d'établir l'inclusion de A dans B .

Montrons que $B \subset C$. Soit $x \in B$. Alors $x \in A \cup B$. Or $A \cup B = B \cap C$, donc $x \in B \cap C$. En particulier $x \in C$. On vient d'établir l'inclusion de B dans C .

Finalement, on a prouvé que si $A \cup B = B \cap C$, alors $A \subset B \subset C$.

Éléments de correction - SVF 68

Supposons que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Montrons que $B \subset C$. Soit $x \in B$. Alors $x \in A \cup B$. Or $A \cup B = A \cup C$, donc $x \in A \cup C$, et ainsi $x \in A$ ou $x \in C$.

Supposons que $x \notin C$. D'après ce qui précède, on a alors $x \in A$. Ainsi $x \in A \cap B$. Or $A \cap B = A \cap C$, donc $x \in A \cap C$, et en particulier $x \in C$, ce qui est contradictoire.

Ainsi $x \in C$. On vient d'établir l'inclusion $B \subset C$.

On montrerait de manière complètement analogue (les ensembles B et C jouent des rôles symétriques) l'inclusion de C dans B .

Finalement, de la double inclusion, on déduit l'égalité des ensembles : $B = C$.

Éléments de correction - SVF 69

1. L'image directe de A par f est l'ensemble suivant : $f(A) = \{f(x) : x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A, f(x) = y\}$.
L'image réciproque de B par f est l'ensemble suivant : $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$.
2. Soit $x \in A$. Par définition de $f(A)$, $f(x) \in f(A)$, ce qui prouve que $x \in f^{-1}(f(A))$. On vient d'établir que $A \subset f^{-1}(f(A))$.
Soit $y \in f(f^{-1}(B))$. Il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Puisque $x \in f^{-1}(B)$, alors $f(x) \in B$. Ainsi $y \in B$.
Tout élément de $f(f^{-1}(B))$ est donc élément de B , ce qui prouve que $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
3. Soit $x \in f^{-1}(B)$. Alors $f(x) \in B$. Or $B \subset C$, donc $f(x) \in C$. Ainsi $x \in f^{-1}(C)$.
Finalement, on a démontré l'inclusion $f^{-1}(B)$ dans $f^{-1}(C)$.

Éléments de correction - SVF 70

Voir cours.

Éléments de correction - SVF 71

L'application f n'est pas injective (en particulier non bijective) car $f(1) = f(-1)$ et $1 \neq -1$. L'unique antécédent de 0 par f est 0 et, puisque tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées, tout élément z de $\mathbf{C}^*$ admet deux antécédents par f . Finalement, tout élément de $\mathbf{C}$ admet au moins un antécédent par f , donc l'application f est surjective.

Éléments de correction - SVF 72

1. Soit $w \in \mathbf{C}$. Résolvons l'équation $f(z) = w$ d'inconnue $z \in \mathbf{C} \setminus \{-3i\}$.
Soit $z \in \mathbf{C} \setminus \{-3i\}$.

$$f(z) = w \iff 2iz - 1 = w(z + 3i) \iff z(2i - w) = 1 + 3iw.$$

Par conséquent, si $w = 2i$, l'équation $f(z) = w$ n'admet pas de solution, et si $w \neq 2i$, l'équation $f(z) = w$ admet au plus une solution (exactement une car on vérifie que $\frac{1+3iw}{2i-w} \neq 3i$).

Par conséquent, l'application f n'est pas surjective : $2i$ n'a pas d'antécédent par f .

En revanche, l'application f est injective car tout élément w de $\mathbf{C}$ admet au plus un antécédent par f .

2. Par définition,

$$f(\mathbf{C} \setminus \{-3i\}) = \{w \in \mathbf{C} \mid \exists z \in \mathbf{C} \setminus \{-3i\}, f(z) = w\}.$$

D'après la discussion précédente, on en déduit que $f(\mathbf{C} \setminus \{-3i\}) = \mathbf{C} \setminus \{2i\}$.

3. D'après la résolution de la question 1., pour tout $w \in \mathbf{C} \setminus \{2i\}$, l'équation $\tilde{f}(z) = w$ admet une unique solution dans $\mathbf{C} \setminus \{-3i\}$.

On en déduit que l'application $\tilde{f}$ est bijective. Sa bijection réciproque est l'application

$$\begin{array}{ccc} \tilde{f}^{-1} : \mathbf{C} \setminus \{2i\} & \longrightarrow & \mathbf{C} \setminus \{-3i\} \\ w & \longmapsto & \frac{1+3iw}{2i-w} \end{array}.$$