
Savez-vous faire ?

Arithmétique et dénombrement

Arithmétique. Il faut connaître le théorème de division euclidienne, ainsi que les notions de multiple, diviseur. La définition de nombre premier est à savoir, ainsi que le théorème de décomposition d'un entier en facteurs premiers. Il faut également connaître les définitions de PGCD, PPCM de deux nombres entiers, et savoir calculer ces valeurs (par la décomposition d'un nombre en facteurs premiers, ou à l'aide de l'algorithme d'Euclide pour la PGCD). Les méthodes utilisées en arithmétique sont très variées, mais on pourra tout de même retenir :

- pour montrer qu'un nombre entier n n'est pas premier, on cherche une factorisation $n = ab$, où a et b sont des entiers supérieurs ou égaux à 2 (SVF 73) ;
- pour montrer qu'un entier a divise un entier b (SVF 74, 75), on peut essayer de :
 - mettre a en facteur dans b , c'est-à-dire trouver un entier c tel que $b = ac$;
 - utiliser des congruences modulo a ;
 - utiliser une récurrence ;
 - utiliser la décomposition primaire de a ;
- pour résoudre une équation faisant intervenir PGCD et/ou PPCM de deux nombres entiers x et y , on peut introduire $X = \frac{x}{\text{PGCD}(x,y)}$ et $Y = \frac{y}{\text{PGCD}(x,y)}$, de sorte que $\text{PGCD}(X, Y) = 1$ et l'on peut ainsi se ramener à une équation plus simple (SVF 76) ;
- pour déterminer le dernier chiffre de l'écriture décimale d'un entier naturel a , on réduit a modulo 10 (SVF 77).

SVF 73. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 4$, le nombre $A = n^4 - 8n^2 + 4$ n'est pas premier.

SVF 74. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $14 \mid 3^{4n+2} + 5^{2n+1}$.

SVF 75. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $13 \mid 2^{4n+2} + 3^{n+2}$.

SVF 76. Résoudre l'équation $(\text{PGCD}(x, y))^2 + xy = 101$, d'inconnue $(x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

SVF 77. Déterminer le dernier chiffre de l'écriture décimale de $A = 2013^{2014^{2015}}$.

Dénombrement. Pour dénombrer, vous avez essentiellement deux outils à votre disposition : le principe multiplicatif (qui permet de compter les objets construits par étapes) et la disjonction de cas (le cardinal d'une réunion disjointe est donnée par la somme des cardinaux). Vérifiez que vous connaissez le nombre de parties d'un ensemble E à n éléments et le nombre de parties à k éléments de ce même ensemble E . Quel est le nombre d'applications de E dans E ? Le nombre de bijections de E dans E (appelées permutations de E) ?

SVF 78.

1. Déterminer le nombre de mains de 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.
2. Combien de ces mains contiennent exactement un roi et deux dames ?
3. Combien de ces mains contiennent exactement un roi et deux piques ?
4. Combien de ces mains contiennent au moins trois carreaux ?

SVF 79. On lance successivement cinq dés de six faces numérotées de 1 à 6.

1. Déterminer le nombre de résultats possibles.
2. Déterminer le nombre de résultats contenant au moins deux six.
3. Déterminer le nombre de résultats amenant exactement deux nombres distincts.

SVF 80. On répartit huit boules dans quatre sacs de couleurs différentes (chaque sac peut recevoir toutes les boules et il peut y avoir des sacs qui restent vides).

1. Quel est le nombre total de répartitions possibles si les boules sont numérotées de 1 à 8 ?
2. Combien y a-t-il de répartitions possibles lorsque les boules sont indiscernables ?

SVF 81. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Combien de poignées de mains sont échangées dans une assemblée de n personnes, où tout le monde se salue.

SVF 82. Un joaillier dispose de 7 pierres semi-précieuses pour fabriquer un collier.

1. De combien de manières peut-il les disposer si le collier à un fermoir ?
2. De combien de manières peut-il les disposer si le collier n'a pas de fermoir ?

SVF 83.

1. Rappeler le nombre d'injections d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments.
2. Déterminer le nombre de surjections d'un ensemble à $n + 1$ éléments dans un ensemble à n éléments.
3. Déterminer le nombre d'applications strictement croissantes de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans l'ensemble $\llbracket 1, 2n \rrbracket$.

Éléments de correction

Éléments de correction - SVF 73

Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq 4$.

$$A = n^4 - 8n^2 + 4 = (n^2 - 2)^2 - 4n^2 = ((n^2 - 2) - 2n)((n^2 - 2) + 2n) = \underbrace{((n - 1)^2 - 3)}_{\text{noté } u} \underbrace{((n + 1)^2 - 3)}_{\text{noté } v}$$

Puisque $n \geq 4$, on a $u \geq 3^2 - 3$ donc en particulier $u > 1$. De même $v \geq 5^2 - 3$, donc en particulier $v > 1$. Il s'ensuit que A n'est pas premier.

Éléments de correction - SVF 74

1ère méthode : utilisation de congruences modulo 14.

Soit $n \in \mathbf{N}$. On a

$$3^{4n+2} + 5^{2n+1} = 9 \cdot (3^4)^n + 5 \cdot (25)^n = 9 \cdot 81^n + 5 \cdot 25^n$$

d'où

$$3^{4n+2} + 5^{2n+1} \equiv 9 \cdot (-3)^n + 5 \cdot (-3)^n \pmod{14} \equiv 14 \cdot (-3)^n \pmod{14} \equiv 0 \pmod{14},$$

donc $14 \mid 3^{4n+2} + 5^{2n+1}$.

2ème méthode : récurrence sur n .

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons $u_n = 3^{4n+2} + 5^{2n+1}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons $H_n : \ll 14 \mid u_n \gg$.

On a $u_0 = 3^2 + 5 = 14$, donc $14 \mid u_0$ et H_0 est vraie.

Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que H_n soit vraie. On a

$$u_{n+1} = 3^{4n+6} + 5^{2n+3} = 3^4 \cdot 3^{4n+2} + 5^{2n+3} = 3^4(u_n - 5^{2n+1}) + 5^{2n+3} = 3^4 u_n + 5^{2n+1}(5^2 - 3^4) = 3^4 u_n - 4 \cdot 14 \cdot 5^{2n+1}.$$

Comme $14 \mid u_n$, on en déduit $14 \mid u_{n+1}$, et ainsi H_{n+1} est vraie. Finalement, le principe de récurrence permet de conclure.

Éléments de correction - SVF 75

Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$2^{4n+2} + 3^{n+2} = 2^2 \cdot (2^4)^n + 3^2 \cdot 3^n = 4 \cdot 16^n + 9 \cdot 3^n,$$

d'où

$$2^{4n+2} + 3^{n+2} \equiv 4 \cdot 3^n + 9 \cdot 3^n \pmod{13} \equiv 13 \cdot 3^n \pmod{13} \equiv 0 \pmod{13},$$

donc $13 \mid 2^{4n+2} + 3^{n+2}$.

Éléments de correction - SVF 76

- *Analyse.* Soit (x, y) solution du problème. Notons $d = \text{PGCD}(x, y)$. Il existe $(X, Y) \in (\mathbf{N}^*)^2$ tel que $x = dX$, $y = dY$ et $\text{PGCD}(X, Y) = 1$. On a alors $d^2 + d^2XY = 101$, i.e. $d^2(1 + XY) = 101$. Comme 101 est un nombre premier et que $1 + XY \geq 2$, on en déduit que $d^2 = 1$, puis $d = 1$ et ainsi $XY = 100$. Comme $\text{PGCD}(X, Y) = 1$ et que $XY = 100 = 2^2 \cdot 5^2$, on déduit : $(X, Y) \in \{(1, 100), (100, 1), (4, 25), (25, 4)\}$, puis $(x, y) \in \{(1, 100), (100, 1), (4, 25), (25, 4)\}$.
- *Synthèse.* Immédiat.
- *Conclusion.* L'ensemble des solutions du problème est $\{(1, 100), (100, 1), (4, 25), (25, 4)\}$.

Éléments de correction - SVF 77

On a $2013 \equiv 3 \pmod{10}$, donc $A \equiv 3^{2014^{2015}} \pmod{10}$. On remarque que $3^4 \equiv 81 \pmod{10} \equiv 1 \pmod{10}$. Cherchons la congruence de $2014^{2015} \pmod{4}$. On a $2014^{2015} = (2 \cdot 1007)^{2015} = 2^{2015} \cdot 1007^{2015}$, donc il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $2014^{2015} = 4n$. Ainsi $A \equiv 3^{4n} \pmod{10} \equiv (3^4)^n \pmod{10} \equiv 1^n \pmod{10} \equiv 1 \pmod{10}$. On conclut que le dernier chiffre de l'écriture décimale de A est 1.

Éléments de correction - SVF 78

1. Une main de 5 cartes dans un jeu de 32 cartes est une partie à 5 éléments d'un ensemble à 32 éléments. Il y a donc $\binom{32}{5}$ mains possibles.
2. Pour obtenir une main contenant exactement un roi et deux dames, on peut procéder par étapes : choisir un roi parmi les 4 du jeu (4 possibilités), choisir deux dames parmi les 4 du jeu ($\binom{4}{2}$ possibilités), puis choisir les deux cartes restantes, ni roi, ni dame ($\binom{24}{2}$ possibilités). Il y a donc exactement $4 \times \binom{4}{2} \times \binom{24}{2}$ mains contenant exactement un roi et deux dames.
3. Il y a deux types de mains contenant exactement un roi et deux piques : les mains contenant le roi de pique (il y en a $1 \times 7 \times \binom{21}{3}$) et celles ne contenant pas le roi de pique (il y en a $3 \times \binom{7}{2} \times \binom{21}{2}$). Il y a donc exactement $1 \times 7 \times \binom{21}{3} + 3 \times \binom{7}{2} \times \binom{21}{2}$ mains contenant exactement un roi et deux piques.
4. Il y a trois types de mains contenant au moins trois carreaux : celles contenant exactement trois carreaux (il y en a $\binom{8}{3} \times \binom{24}{2}$), celles contenant exactement quatre carreaux (il y en a $\binom{8}{4} \times \binom{24}{1}$) et celles contenant exactement cinq carreaux (il y en a $\binom{8}{5}$). Il y a donc $\binom{8}{3} \times \binom{24}{2} + \binom{8}{4} \times \binom{24}{1} + \binom{8}{5}$ mains contenant au moins trois carreaux.

Éléments de correction - SVF 79

1. Il y a 6^5 résultats possibles.
2. Dénombrons les résultats contenant strictement moins de deux 6 : il y a 5^5 résultats ne contenant aucun 6 et 5×5^4 résultats contenant exactement un 6 (dénombrement par étapes : choix de la place du 6 - 5 possibilités - puis choix des quatre autres résultats - 5 possibilités à chaque fois). Il y a donc 2×5^5 résultats contenant strictement moins de deux 6 et, par passage au complémentaire, il y a donc exactement $6^5 - 2 \times 5^5$ résultats contenant au moins deux 6.
3. Il y a deux types de résultats amenant exactement deux nombres distincts : ceux où les deux nombres apparaissent respectivement 1 et 4 fois, et ceux où les deux nombres apparaissent respectivement 2 et 3 fois. Il y a donc $6 \times 5 \times 5 + 6 \times 5 \times \binom{5}{2}$ résultats amenant exactement deux nombres distincts.

Éléments de correction - SVF 80

1. Il y a 4^8 répartitions possibles.
2. Les boules étant indiscernables, il s'agit de compter le nombre de manières d'écrire l'entier 8 comme une somme de 4 entiers a_0, a_1, a_2 et a_3 (a_i correspondant au nombre de boules du i -ième sac). Certains sacs pouvant être vides, on peut interpréter ce problème comme le nombre de façon de placer trois séparations dans la série $\circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ$. Par exemple, l'écriture $\circ | \circ \circ || \circ \circ \circ \circ$ correspond à la répartition d'une boule dans le premier sac, de deux boules dans le second sac, de 0 boule dans le 3ième sac et de cinq boules dans le dernier sac. Il s'agit de répartir ces trois séparations parmi 11 cases (8 cases contenant les $\circ$ et 3 cases contenant les séparations). Il y a donc $\binom{11}{3}$ manières de placer ces 8 boules dans les sacs.

Éléments de correction - SVF 81

La deuxième personne arrivant dans la pièce serrera la main de la première personne, la troisième personne arrivant serrera la main de deux personnes,... et la dernière personne arrivant serrera la main des $n - 1$ personnes présentes. Il y a donc $\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$ poignées de mains échangées dans une assemblée de n personnes (on peut aussi raisonner en remarquant qu'une poignée de mains correspond au choix de 2 personnes dans l'assemblée : il y en a donc $\binom{n}{2}$).

Éléments de correction - SVF 82

1. On peut mettre un ordre sur les sept pierres enfilées sur le collier, en décidant que la première est celle qui touche le fermoir. Il y a donc sept choix possibles pour la première pierre, puis 6 choix possibles pour la seconde, et ainsi de suite. On obtient donc $7!$ colliers avec fermoir possibles.
2. Si le collier n'a pas de fermoir, seul l'ordre des pierres les unes par rapport aux autres a une importance. Choisissons une pierre et décidons artificiellement que celle-ci jouera le rôle du fermoir. Il y a alors $6!$ possibilités de placer les six autres pierres. Par conséquent, le nombre possible de colliers sans fermoir est $6!$.

Éléments de correction - SVF 83

1. Le nombre d'injections d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est 0 si $p > n$ et $\frac{n!}{(n-p)!}$ dans le cas contraire (cf. cours).
2. Considérons une application f d'un ensemble à $n + 1$ éléments dans un ensemble à n éléments. Celle-ci est surjective si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée possède au moins un antécédent par f . On en déduit qu'une application surjective d'un ensemble à $n + 1$ éléments sur un ensemble à n éléments est telle que chaque élément de l'ensemble d'arrivée possède exactement un antécédent par f , excepté un de ses éléments qui en possède exactement 2.
Pour construire une telle application surjective, on peut donc procéder par étapes : choix de l'élément de l'ensemble d'arrivée ayant exactement deux antécédents (n possibilités), choix des deux antécédents de cet élément ($\binom{n+1}{2}$ possibilités), choix de l'image de chacun des $n-1$ éléments restants (images deux à deux distinctes : il y a $(n-1)!$ possibilités).
Il y a donc $n \times \binom{n+1}{2} \times (n-1)!$ applications surjectives d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à $n + 1$ éléments.
3. Remarquons que l'ensemble des images d'une application f strictement croissante de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, 2n \rrbracket$ est une partie à n éléments de $\llbracket 1, 2n \rrbracket$. Réciproquement, à une telle partie, on associe de manière unique une application f strictement croissante de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, 2n \rrbracket$ (l'image de 1 par l'application étant donné par le plus petit élément de la partie, etc).
Il y a donc autant d'applications strictement croissantes de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, 2n \rrbracket$ que de parties à n éléments de l'ensemble $\llbracket 1, 2n \rrbracket$: il y en a $\binom{2n}{n}$.