
Savez-vous faire ?

Les réels

Il faut savoir déterminer la borne supérieure (resp. inférieure) d'un ensemble, à l'aide d'une des quatre caractérisations de la borne supérieure (resp. inférieure) données dans le cours : si A une partie non vide et majorée de $\mathbf{R}$, et $M \in \mathbf{R}$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $M = \sup(A)$.
- (ii) $\begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ \text{pour tout } M' \text{ majorant de } A, M \leq M' \end{cases}$
- (iii) $\begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ \text{pour tout } b < M, b \text{ n'est pas un majorant de } A \end{cases}$
- (iv) $\begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, M - \varepsilon < x \end{cases}$
- (v) $\begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ \text{il existe } u \in A^{\mathbf{N}} \text{ telle que } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = M \end{cases}$

De plus, si B une partie non vide et minorée de $\mathbf{R}$, et $m \in \mathbf{R}$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $m = \inf(B)$.
- (ii) $\begin{cases} m \text{ est un minorant de } B \\ \text{pour tout } m' \text{ minorant de } B, m' \leq m \end{cases}$
- (iii) $\begin{cases} m \text{ est un minorant de } B \\ \text{pour tout } b > m, b \text{ n'est pas un minorant de } B \end{cases}$
- (iv) $\begin{cases} m \text{ est un minorant de } B \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in B, x < m + \varepsilon \end{cases}$
- (v) $\begin{cases} m \text{ est un minorant de } B \\ \text{il existe } u \in B^{\mathbf{N}} \text{ telle que } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = m \end{cases}$

Il faut connaître la définition de la partie entière, ainsi que les assertions :

$$\forall (x, \alpha) \in \mathbf{R}^2, \quad \alpha = [x] \iff (\alpha \leq x < \alpha + 1 \quad \text{et} \quad \alpha \in \mathbf{Z}),$$

et

$$\forall (x, \alpha) \in \mathbf{R}^2, \quad \alpha = [x] \iff (x - 1 < \alpha \leq x \quad \text{et} \quad \alpha \in \mathbf{Z}).$$

SVF 84. Etudier l'existence puis déterminer le cas échéant les bornes supérieure et inférieure des ensembles suivants :

- 1. $A = \left\{ 2 - \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}^* \right\}$;
- 2. $B = \left\{ 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{m} : (n, m) \in (\mathbf{Z}^*)^2 \right\}$;
- 3. $C = \left\{ 1 - \frac{1}{n-m} : (n, m) \in \mathbf{Z}^2, n \neq m \right\}$;
- 4. $D = \left\{ \frac{pq}{p^2 + q^2} : (p, q) \in (\mathbf{N}^*)^2 \right\}$;
- 5. $E = \left\{ \frac{2^n}{2^m + 3^{n+m}} : (n, m) \in \mathbf{N}^2 \right\}$;
- 6. $F = \left\{ \frac{n+2}{n+1} + \frac{q-1}{q+1} : (n, q) \in \mathbf{N}^2 \right\}$;
- 7. $G = \left\{ \frac{mn}{m^2 + n^2 + mn} : (m, n) \in (\mathbf{N}^*)^2 \right\}$.

SVF 85. Montrer que, pour tout $(x, \alpha) \in \mathbf{R} \times \mathbf{Z}$, $[x + \alpha] = [x] + \alpha$.

SVF 86. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $[(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2] = 4n + 1$.

SVF 87. Soit $x \in \mathbf{R}_+$. Montrer que $[\sqrt{[x]}] = [\sqrt{x}]$.

SVF 88. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{Z}$,

$$\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+4}{4} \right\rfloor = n.$$

Éléments de correction

Éléments de correction - SVF 84

1. Puisque pour tout $n \geq 1$, $2 - \frac{1}{n} \geq 1$ et que $1 \in A$, cet ensemble admet 1 comme plus petit élément, donc comme borne inférieure.
Pour tout $n \geq 1$, $2 - \frac{1}{n} \leq 2$, donc 2 est un majorant de A . On a, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $2 - \frac{1}{n} \in A$ et $(2 - \frac{1}{n})$ converge vers 2. Donc $\sup(A) = 2$.
Autre méthode pour la borne supérieure. 2 est un majorant de A . Soit $b < 2$. Posons $n > \frac{1}{2-b}$. Alors, puisque $2 - b > 0$, on a $2 - \frac{1}{n} > b$, donc b n'est pas un majorant de A . Finalement, 2 est la borne supérieure de A .
2. Puisque pour tout $(n, m) \in (\mathbf{Z}^*)^2$, $-1 \leq 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \leq 3$, et que -1 et 3 sont des éléments de B , cet ensemble admet -1 comme plus petit élément (donc comme borne inférieure) et 3 comme plus grand élément (donc comme borne supérieure).
3. Pour tout $(n, m) \in \mathbf{Z}^2$ avec $n \neq m$, $0 \leq 1 \leq \frac{1}{n-m} \leq 2$. De plus, 0 et 2 sont des éléments de C , donc C admet 0 comme plus petit élément (donc comme borne inférieure) et 2 comme plus grand élément (donc comme borne supérieure).
4. Soit $(p, q) \in (\mathbf{N}^*)^2$. De l'inégalité $(p - q)^2 \geq 0$, on conclut sans peine que $\frac{pq}{p^2+q^2} \leq \frac{1}{2}$. On en déduit que D est majoré par $\frac{1}{2}$. Or $\frac{1}{2} \in D$, donc $\frac{1}{2}$ est le plus grand élément de D (donc la borne supérieure).
 0 minore D . De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\frac{n}{n^2+1} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$, d'où $\inf(D) = 0$.
Autre méthode pour la borne inférieure. 0 minore D . Soit $\varepsilon > 0$. Soit n un entier tel que $n > \frac{1}{\varepsilon}$ (par exemple $n = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$). On a en particulier $n + \frac{1}{n} > \frac{1}{\varepsilon}$, puis $\frac{1}{n + \frac{1}{n}} < \varepsilon$, ce qui se réécrit $\frac{n}{n^2+1} < \varepsilon$. Puisque $\frac{n}{n^2+1} \in D$, on en déduit que 0 est la borne inférieure de D .
5. 0 minore E . Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\frac{1}{2^n+3^n} \in E$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n+3^n} = 0$, donc $\inf(E) = 0$.
Autre méthode pour la borne inférieure. 0 minore E . Soit $\varepsilon > 0$. Soit m un entier naturel tel que $m > \frac{-\ln(\varepsilon)}{\ln(2)}$ (par exemple $n = \lfloor \frac{-\ln(\varepsilon)}{\ln(2)} \rfloor + 1$). On a $2^m > \frac{1}{\varepsilon}$, puis en particulier $2^m + 3^m > \frac{1}{\varepsilon}$, et ainsi $\varepsilon > \frac{1}{2^m+3^m}$. Comme $\frac{1}{2^m+3^m} \in E$, on en déduit que 0 est la borne inférieure de E .
Montrons que pour tout $(m, n) \in \mathbf{N}$, $\frac{2^n}{2^m+3^{m+n}} \leq \frac{1}{2}$, i.e. $2^{n+1} \leq 2^m + 3^{m+n}$. Si $m \geq 1$, l'inégalité est acquise car alors $3^{m+n} \geq 3^{n+1} \geq 2^{n+1}$. Examinons le cas où $m = 0$. Posons pour tout $n \in \mathbf{N}$, $H_n : « 3^n + 1 \geq 2^{n+1} »$. H_0 est vraie. Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que H_n soit vraie. On a $3^{n+1} + 1 \geq 3(2^{n+1} - 1) + 1$. De plus, $3(2^{n+1} - 1) + 1 = 2^{n+2} + 2^{n+1} - 2 \geq 2^{n+2}$, et ainsi H_{n+1} est vraie. On conclut avec le principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, H_n est vraie. Ainsi $\frac{1}{2}$ est un majorant de E . Or $\frac{1}{2} \in E$, donc $\sup(E) = \frac{1}{2}$.
6. Puisque pour tout $(n, m) \in \mathbf{N}^2$, $\frac{n+2}{n+1} + \frac{q-1}{q+1} = 2 + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{q+1}$, on a $1 \leq \frac{n+2}{n+1} + \frac{q-1}{q+1} \leq 0$.
Puisque $1 \in F$, $\inf(F) = 1$.
 3 majore F , et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $3 - \frac{2}{n+1} \in F$, avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 - \frac{2}{n+1} = 3$, d'où $\sup(F) = 3$.
Autre méthode pour la borne supérieure. 3 majore F . Soit $\varepsilon > 0$. Soit n un entier strictement supérieur à $2\varepsilon - 1$ (par exemple $n = \lfloor 2\varepsilon - 1 \rfloor + 1$). On a $3 - \varepsilon < 3 - \frac{2}{n+1}$, et $3 - \frac{2}{n+1} \in F$, donc $\sup(F) = 3$.
7. Soit $(n, m) \in (\mathbf{N}^*)^2$. On a $m^2 + 2mn + n^2 \geq 0$, d'où $\frac{mn}{n^2+mn+m^2} \leq \frac{1}{3}$. Comme $\frac{1}{3} \in G$, $\sup(G) = \frac{1}{3}$.
 0 minore G . De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\frac{n}{n^2+n+1} \in G$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2+n+1} = 0$, donc $\inf(G) = 0$.
Autre méthode pour la borne inférieure. 0 minore G . Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $n > \frac{1}{\varepsilon}$ (par exemple $n = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$). On a en particulier $n + 1 + \frac{1}{n} > \varepsilon$, d'où $\frac{1}{n+1+\frac{1}{n}} < \varepsilon$, se qui se réécrit $\frac{n}{n^2+n+1} < \varepsilon$. Puisque $\frac{n}{n^2+n+1} \in G$, on en déduit que $\inf(G) = 0$.

Éléments de correction - SVF 85

Soit $(x, \alpha) \in \mathbf{R} \times \mathbf{Z}$. On a : $\lfloor x \rfloor \in \mathbf{Z}$ et $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. D'où, puisque $\alpha \in \mathbf{Z}$, $\lfloor x \rfloor + \alpha \in \mathbf{Z}$ et $\lfloor x \rfloor + \alpha \leq x + \alpha < (\lfloor x \rfloor + \alpha) + 1$. Par définition de $\lfloor x + \alpha \rfloor$, on conclut que $\lfloor x + \alpha \rfloor = \lfloor x \rfloor + \alpha$.

Éléments de correction - SVF 86

Soit $n \in \mathbf{N}$. Par définition de la partie entière, puisque $4n + 1 \in \mathbf{Z}$, on a

$$\begin{aligned} \lfloor (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 \rfloor = 4n + 1 &\iff 4n + 1 \leq (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 < 4n + 2 \\ &\iff 4n + 1 \leq 2n + 1 + 2\sqrt{n(n+1)} < 4n + 2 \\ &\iff \begin{cases} 2n &\leq 2\sqrt{n(n+1)} \\ 2\sqrt{n(n+1)} &< 2n + 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} n^2 &\leq n^2 + n \\ 4n^2 + 4n &< 4n^2 + 4n + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

et ce deux dernières inégalités sont vraies, ce qui prouve que l'égalité initiale est vraie également.

Éléments de correction - SVF 87

Posons $n = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$. Alors $x \leq \sqrt{x} < n + 1$. Donc $n^2 \leq x < (n + 1)^2$. D'une part, n^2 est entier et $n^2 \leq x$, donc $n^2 \leq \lfloor x \rfloor$. D'autre part, $\lfloor x \rfloor \leq x < (n + 1)^2$. Finalement, $n^2 \leq \lfloor x \rfloor < (n + 1)^2$ puis, par stricte croissance de la fonction racine carrée, $n \leq \sqrt{\lfloor x \rfloor} < n + 1$. Comme n est un entier, ceci signifie que $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = n = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.

Éléments de correction - SVF 88

On sépare en cas, selon le reste de la division euclidienne de n par 4. On présente les résultats dans le tableau suivant :

n	$\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$	$\left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor$	$\left\lfloor \frac{n+4}{4} \right\rfloor$	Somme
$4k$	$2k-1$	k	$k+1$	$4k$
$4k+1$	$2k$	k	$k+1$	$4k+2$
$4k+2$	$2k$	$k+1$	$k+1$	$4k+2$
$4k+3$	$2k+1$	$k+1$	$k+1$	$4k+3$

Ceci établit le résultat voulu, par examen de tous les cas modulo 4.