
Savez-vous faire ?

Suites réelles

Vous devez savoir déterminer le terme général des suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques et récurrentes linéaires d'ordre 2. Les définitions des différentes notions de limites doivent être comprises. Vous devez pouvoir montrer à l'aide de cette définition qu'une suite admet une certaine limite. Vous devez connaître les limites de référence et savoir les utiliser pour lever certaines formes indéterminées. Vous devez connaître et savoir utiliser la notion de sous-suite, et les trois théorèmes d'existence de limite. Vous devez également connaître la méthode permettant d'étudier les suites définies de manière implicite.

SVF 89. Déterminer le terme général de chacune des suites u définies ci-dessous par :

- | | |
|--|---|
| (i) $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 3u_n + 5$ | (ii) $u_0 = -4$ et $u_{n+1} = \frac{u_n - 2}{3}$ |
| (iii) $u_0 = 1, u_{n+1} = 4u_n^5$ | (iv) $u_0 = 1, u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ |
| (v) $u_0 = 1, u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 8u_{n+1} - 16u_n$ | (vi) $u_0 = 1, u_1 = 1 + \sqrt{3}$ et $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n$. |

SVF 90. Montrer, en revenant à la définition, que la suite u de terme général $u_n = 2^n$ diverge vers $+\infty$, puis que la suite v de terme général $v_n = \frac{1+n}{2+3n}$ converge vers $\frac{1}{3}$.

SVF 91. Déterminer les suites dont le terme général est donné par :

- | | | |
|---|--|----------------------------------|
| (i) $u_n = \frac{3^n + \sin(n)}{2^n - 5^{n+2}}$ | (ii) $u_n = \frac{\sqrt{n+e^{-n}}}{n^2 - n^3}$ | (iii) $u_n = \sqrt{n^2 + n} - n$ |
| (iv) $u_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ | (v) $u_n = \frac{2^n + n^3}{n! - n}$ | (vi) $u_n = (1 - e^{-n})^n$. |

SVF 92. 1. Montrer que pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1, $\frac{x(x+1)}{(2x+1)^2} \leq \frac{1}{4}$.

2. En déduire que la suite u de terme général $u_n = \prod_{k=0}^n \frac{k(k+1)}{(2k+1)^2}$ converge et déterminer sa limite.

SVF 93. On considère la suite u de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

- Montrer que u admet une limite $\ell \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$.
- Prouver que $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$ pour tout entier naturel n non nul.
- En déduire la valeur de ℓ .

SVF 94. On introduit les suites u et v définies par la donnée de leurs termes généraux :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1).$$

Montrer que les suites u et v sont adjacentes.

Indication : on pourra commencer par montrer que $\ln(x) \leq x - 1$ pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$.

SVF 95. 1. Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, l'équation $x^n = nx - 1$ admet une unique solution sur $[0; 1]$, que l'on notera u_n .

2. Prouver que la suite u ainsi définie est monotone et déterminer la valeur de sa limite.

Éléments de correction

Éléments de correction - SVF 89

- (i) $u_n = \frac{11 \times 3^n - 5}{2}$;
- (ii) $u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 1$;
- (iii) $u_n = 2^{\frac{5^n - 1}{2}}$;
- (iv) $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$;
- (v) $u_n = \left(2 - \frac{9}{4}n \right) 4^n$;
- (vi) $u_n = 2^n \left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \right)$.

Éléments de correction - SVF 90

1. Soit $M \in \mathbf{R}_+^*$. Posons $N = \left\lfloor \frac{\ln(M)}{\ln(2)} \right\rfloor + 1$. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à N . On a

$$n \geq \frac{\ln(M)}{\ln(2)} \quad \text{donc} \quad 2^n \geq M \quad \text{donc} \quad u_n \geq M.$$

On a prouvé que pour tout nombre réel M strictement positif, il existe un rang au delà duquel $u_n \geq M$. Donc u diverge vers $+\infty$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $N = \max(0, \lfloor \frac{1-6\varepsilon}{9\varepsilon} \rfloor + 1)$. Soit $n \geq N$. Alors

$$n \geq \frac{1-6\varepsilon}{9\varepsilon} \quad \text{donc} \quad 1 \leq (6+9n)\varepsilon.$$

Or

$$\left| v_n - \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{6+9n}.$$

Donc $|v_n - \frac{1}{3}| \leq \varepsilon$.

Par conséquent, on a prouvé que pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, il existe un rang au delà duquel $|v_n - \frac{1}{3}| \leq \varepsilon$. Aussi la suite v converge-t-elle vers $\frac{1}{3}$.

Éléments de correction - SVF 91

On remarque que $\frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$: en effet, il s'agit de la limite du taux d'accroissement en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$. On utilise ce résultat (à connaître !) dans les questions (iv) et (vi).

- (i) $u_n = \frac{3^n + \sin(n)}{2^n - 5^{n+2}} = \left(\frac{3}{5}\right)^n \left(\frac{1 + \sin(n)/3^n}{(2/5)^n - 25} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- (ii) $u_n = \frac{1}{n^{5/2}} \frac{\sqrt{1 + e^{-n}/n}}{1/n - 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- (iii) $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/n} + 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.
- (iv) $u_n = \frac{\ln(1 + 1/n) - \ln(1)}{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.
- (v) $u_n = \frac{2^n}{n!} \frac{1 + n^3/2^n}{1 - 1/(n-1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.
- (vi) $u_n = \exp\left(\frac{n}{e^n} \frac{\ln(1 - e^{-n}) - \ln(1)}{e^{-n}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Éléments de correction - SVF 92

1. Soit $x \geq 1$.

$$\frac{x(x+1)}{(2x+1)^2} - \frac{1}{4} = \frac{-4}{4(2x+2)^2} \text{ donc } \frac{x(x+1)}{(2x+1)^2} \leq \frac{1}{4}.$$

2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\frac{k(k+1)}{(2k+1)^2} \leq \frac{1}{4}$$

donc

$$0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Or une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ converge vers 0, donc le théorème d'encadrement assure que la suite u converge vers 0.

Éléments de correction - SVF 93

1. La suite u est croissante car pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} \geq 0$. Le théorème de la limite monotone assure alors que u admet une limite dans $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$.
2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors

$$u_{2n} - u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

De plus, pour tout $k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$, $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$. Ainsi,

$$u_{2n} - u_n \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

3. Supposons que u converge vers un nombre réel ℓ . Alors (u_{2n}) , sous-suite de u , converge également vers ℓ . Donc $u_{2n} - u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, ce qui est absurde puisque $u_{2n} - u_n = \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. Par conséquent, u diverge vers $+\infty$.

Éléments de correction - SVF 94

On montre que $\ln(x) \leq x - 1$ pour tout $x > 0$ en étudiant la fonction $f : x \mapsto \ln(x) - (x - 1)$ (preuve laissée au lecteur).

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \quad \text{et} \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right).$$

Or

$$\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \leq \frac{n}{n+1} - 1 = -\frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leq \frac{n+2}{n+1} - 1 \leq \frac{1}{n+1}.$$

Donc

$$u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} \leq 0 \quad \text{et} \quad v_{n+1} - v_n \geq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} \geq 0.$$

Par conséquent, la suite u est décroissante et la suite v est croissante.

De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$v_n - u_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right),$$

donc la suite de terme général $v_n - u_n$ tend vers 0.

On en déduit que les suites u et v sont adjacentes.

Éléments de correction - SVF 95

1. Soit $n \in \mathbf{N}$ supérieur ou égal à 2. Posons $f_n : x \mapsto x^n - nx + 1$. On montre que la fonction f_n est strictement décroissante sur $[0; 1]$ (à faire!). Elle est par ailleurs continue sur cet intervalle, donc le théorème de la bijection assure que f réalise une bijection de $[0; 1]$ sur son image $f([0; 1]) = [f(0); f(1)] = [2 - n; 1]$.
Or $0 \in [2 - n; 1]$, donc l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0; 1]$.
2. Soit $n \in \mathbf{N}$ supérieur ou égal à 2. On sait que $u_{n+1}^{n+1} = (n+1)u_{n+1} - 1$. Donc

$$f_n(u_{n+1}) = u_{n+1}^n - nu_{n+1} + 1 = u_{n+1}^n - u_{n+1}^{n+1} + u_{n+1} = u_{n+1}^n(1 - u_{n+1}) + u_{n+1}.$$

Or $u_{n+1} \in [0; 1]$, donc $f_n(u_{n+1}) \geq 0$. Puisque $f_n(u_{n+1}) \geq f_n(u_n)$ et f est décroissante strictement sur $[0; 1]$, on obtient $u_{n+1} \leq u_n$. On en déduit que la suite u est décroissante.

Étant décroissante et minorée par 0, la suite u converge vers un nombre réel $\ell \geq 0$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n^n = nu_n - 1$ (*). Supposons $\ell \neq 0$. Alors $\ell > 0$, donc $nu_n - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Avec la relation

(*), on en déduit que $u_n^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Or $u_n \in [0; 1]$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, donc $u_n^n \in [0; 1]$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, ce qui contredit $u_n^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Finalement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.