
Savez-vous faire ?

Suites réelles 2

SVF 96. Trouver un équivalent le plus simple possible des suites ci-dessous :

$$u_n = \operatorname{ch} \left(\frac{1}{(n^3 + 6n)^{\frac{1}{4}}} \right) - 1 \quad v_n = \frac{1}{n^2 + 1} - \frac{1}{3n - \sqrt{n}} \quad w_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n-1} \quad x_n = \cos \left(\frac{1}{n} \right) - \operatorname{ch} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

SVF 97. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}} \right)^{e^{2n} \ln(n)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan}(n) \right)^{\operatorname{ch}(\ln(n))}$$

On pourra admettre que $\operatorname{Arctan}(u_n) \sim u_n$ si u_n est une suite convergeant vers 0.

SVF 98. Montrer que

$$\sum_{k=n+1}^{2n} k! \sim (2n)!.$$

SVF 99. Etudier la nature de la suite (suite divergente ou convergente, limite éventuelle) de premier terme $u_0 = 4$ et vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 3}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

SVF 100. Etudier la nature de la suite (suite divergente ou convergente, limite éventuelle) de premier terme $u_0 = 4$ et vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{u_n + 3}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Éléments de correction

Éléments de correction - SVF 96

1. On a $\frac{1}{\sqrt{n^3 + 6n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, d'où

$$u_n \sim \frac{1}{2\sqrt{n^3 + 6n}} \sim \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}.$$

2. On a

$$v_n = -\frac{n^2 - 3n + \sqrt{n} + 1}{(3n - \sqrt{n})(n^2 + 1)} \sim -\frac{1}{3n}.$$

3. On a

$$w_n = \frac{n+2 - (n-1)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}})} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

4. On a $\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \sim -\frac{1}{2n^2}$ et $1 - \operatorname{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim -\frac{1}{2n}$, d'où $\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 = o\left(1 - \operatorname{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$, et ainsi

$$x_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 + 1 - \operatorname{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim 1 - \operatorname{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim -\frac{1}{2n}.$$

Éléments de correction - SVF 97

On notera u_n le terme général de chaque suite dont on veut calculer la limite.

1. On a, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\ln(u_n) = e^{2n} \ln(n) \ln\left(\frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}\right)$. Comme $\frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, on a :

$$\ln\left(\frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}\right) = \ln\left(1 + \underbrace{\frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}} - 1}_{\rightarrow 0}\right) \sim \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}} - 1 = \frac{-2e^{-n}}{e^n + e^{-n}} \sim -2e^{-2n},$$

d'où

$$\ln(u_n) \sim e^{2n} \ln(n)(-2e^{-2n}) = -2 \ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty,$$

puis $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ en composant la limite précédente par exp.

2. On a $\ln(u_n) = \text{ch}(\ln n) \ln\left(\frac{2}{\pi} \text{Arctan } n\right)$. D'une part :

$$\text{ch}(\ln n) = \frac{e^{\ln n} + e^{-\ln n}}{2} = \frac{n + \frac{1}{n}}{2} \sim \frac{n}{2}.$$

D'autre part, comme $\frac{2}{\pi} \text{Arctan}(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$,

$$\ln\left(\frac{2}{\pi} \text{Arctan}(n)\right) = \ln\left(1 + \frac{2}{\pi} \text{Arctan}(n) - 1\right) \sim \frac{2}{\pi} \text{Arctan}(n) - 1 = \frac{2}{\pi} \left(\text{Arctan}(n) - \frac{\pi}{2}\right).$$

Or $\text{Arctan}(n) - \frac{\pi}{2} = \text{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right)$, d'où

$$\ln\left(\frac{2}{\pi} \text{Arctan}(n)\right) = -\frac{2}{\pi} \text{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{2}{\pi n}.$$

Finalement,

$$\ln(u_n) \sim \frac{n}{2} \left(-\frac{2}{\pi n}\right) = -\frac{1}{\pi} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\pi},$$

puis, en composant la limite précédente par exp, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{\pi}}$.

Éléments de correction - SVF 98

Puisque $k!$ croît très rapidement lorsque k croît, on peut conjecturer que les derniers termes de la somme sont essentiels. On isole alors les deux derniers termes et on a, par majoration d'une somme de réels, pour tout $n \geq 2$,

$$0 \leq S_n - ((2n-1)! + (2n)!) = \sum_{k=n+1}^{2n-2} k! \leq (n-2)(2n-2)! \leq (2n-1)!$$

puis

$$0 \leq S_n - (2n)! = \left(\sum_{k=n+1}^{2n-2} k!\right) + (2n-1)! \leq 2(2n-1)!,$$

donc

$$0 \leq \frac{S_n - (2n)!}{(2n)!} \leq \frac{2}{2n}.$$

Avec le théorème d'encadrement, on en déduit que le terme encadré tend vers 0 et finalement

$$\sum_{k=n+1}^{2n} k! \sim (2n)!$$

Éléments de correction - SVF 99

Posons $f : x \mapsto \sqrt{x+3}$. Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

La fonction f est strictement croissante en tant que composée de fonctions strictement croissantes. De plus, $f(-3) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Soit $x \in \mathbf{R}_+$. On a

$$f(x) \geq x \iff \sqrt{x+3} \geq x \iff x+3 \geq x^2 \iff x \in [0; x_0],$$

où $x_0 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$. De plus, pour tout $x \in \mathbf{R}_-$, $f(x) \geq x$ est toujours vérifiée (puisque une racine carrée est toujours positive). Enfin, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f(x) = x \iff x = x_0.$$

En résumé,

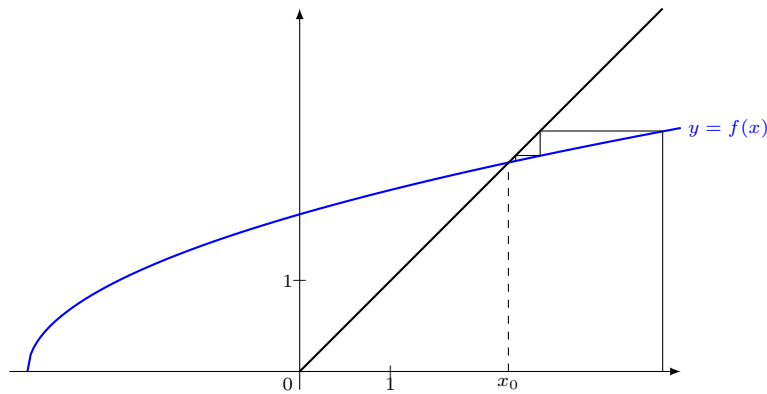
x	-3	x_0	$+\infty$
f		$\nearrow$	$+\infty$
$f(x) - x$	$+$	0	$-$

Posons $I = [x_0; +\infty[$. La fonction f est croissante sur I avec $f(x_0) = x_0$, donc pour tout $x \in I$, $f(x) \geq x_0$ et ainsi $f(I) \subset I$. Puisque I est stable par f et $u_0 \in I$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in I$.

De plus, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq x$, d'où pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(u_n) \leq u_n$ (puisque $u_n \in I$), *i.e.* pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$, ce qui entraîne que u est décroissante. Or u est minorée par x_0 , donc u converge d'après le théorème de la limite monotone. Notons $\ell \in \mathbf{R}$ sa limite.

La seule limite possible est l'unique point fixe x_0 de f , donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x_0$.

Notons qu'on aurait pu conjecturer ces résultats (décroissance de u et convergence vers x_0) à l'aide d'un dessin :



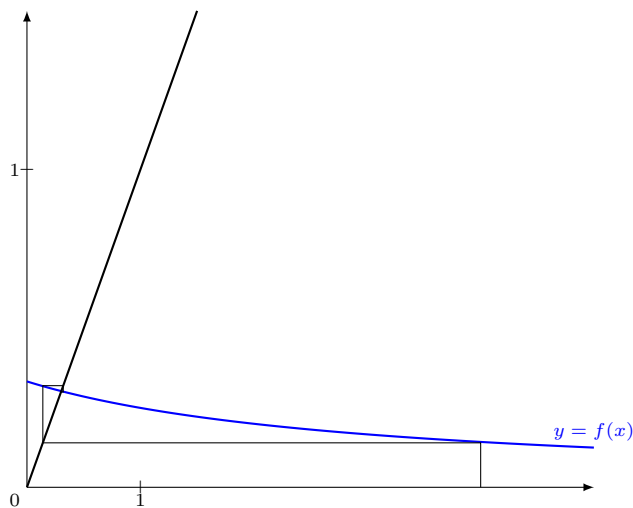
Éléments de correction - SVF 100

Posons

$$f : x \mapsto \frac{1}{x+3}.$$

Alors $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. De plus, l'expression $f(x) - x$ est positive pour $x \in]-\infty; x_0] \cup]-3; x_1]$, avec $x_0 = \frac{-3-\sqrt{13}}{2}$ et $x_1 = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$, négative sur $[x_0; -3[\cup [x_1; +\infty[$ et nulle uniquement en x_0 et en x_1 (à démontrer). Enfin, f est strictement décroissante sur $] -\infty; -3[$ et sur $] -3; +\infty[$ en tant que composée d'une fonction strictement décroissante et d'une fonction strictement croissante.

x	$-\infty$	x_0	-3	x_1	$+\infty$
f	0	x_0	$+\infty$	x_1	0
$f(x) - x$	$+$	0	$-$	$+$	0



Le tracé des premiers termes de la suites u non permet d'émettre la conjecture suivante : la suite u est une suite qui converge vers x_1 . La sous-suite (u_{2n}) semble être décroissante.

Etudions la suite (u_{2n}) . Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons $v_n = u_{2n}$. Alors v vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = f \circ f(v_n)$. Posons $I = [x_1; +\infty[$. La fonction f est décroissante sur I , $f(x_1) = x_1$ et f tend vers 0 en $+\infty$. Par conséquent, $f(I) \subset [0; x_1]$. De plus, f étant décroissante sur $[0; x_1]$ et sachant que $f(x_1) = x_1$, on a $f([0; x_1]) \subset I$. Ainsi $f \circ f(I) = I$, donc $v_n \in I$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

$v_0 \in I$ et $f \circ f(I) \subset I$, donc $v_n \in I$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

De plus, pour tout $x \in I$,

$$f \circ f(x) - x = \frac{-3x^2 - 9x + 3}{10 + 3x} = -3 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{10 + 3x} \leq 0.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$v_{n+1} - v_n = f \circ f(v_n) - v_n \leq 0,$$

donc la suite v est décroissante. La suite v est décroissante et minorée par x_1 , donc la suite v converge vers un nombre réel $\ell \geq x_1$.

Par passage à la limite dans la relation $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$, on obtient $\ell = f \circ f(\ell)$, donc $\ell = x_0$ ou $\ell = x_1$. Or $\ell \geq x_1$, donc $\ell = x_1$ et v converge vers x_1 .

De plus, $u_{2n+1} = f(u_{2n})$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Par passage à la limite dans cette égalité, on en déduit que (u_{2n+1}) converge vers $f(x_1) = x_1$.

Les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite x_1 , donc u converge vers x_1 .