
Savez-vous faire ?

Systèmes linéaires

SVF 101. Résoudre, selon les valeurs du paramètre $a \in \mathbf{R}$, les systèmes suivants, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$:

$$1. \begin{cases} 2x + 4y + (2 + 2a)z = 8 - 6a \\ 4x + 2y + (1 + 4a)z = 13 - 9a \\ -2x + 14y + (7 - 2a)z = 2 - 4a \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + y + (3 + a)z = 2a \\ -2x - 4y + (4a - 2)z = 8 + 2a \\ 2x + 3y + 5z = -3 + 2a \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x + 3y - (a + 1)z = -1 \\ -2x - y + (a + 1)z = 1 \\ x + (a + 1)y - (a + 1)z = a + 1 \end{cases}$$

SVF 102. Décrire, si possible, par équations les ensembles suivants :

$$E = \{(x + 2y - z + t, 2x + y + z + 3t, -5x + 2z) : (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4\}$$

$$F = \{(x + y + 3z, x + 2y + 4z, 3y + 3z) : (x, y, z) \in \mathbf{R}^3\}.$$

SVF 103. 1. On considère la droite D_1 dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$D_1 = \{(1 + 3t, -t, 2 - 5t) : t \in \mathbf{R}\}$$

Décrire D_1 comme l'intersection de deux plans.

2. On considère la droite D_2 , intersection des plans d'équations respectives $x + y + z = 4$ et $-x + 3y - z = 7$.
Donner une représentation paramétrique de D_2 .

SVF 104. Pour chacune des applications suivantes, déterminer si elle est injective, surjective et donner, si possible, une description de son image par équations.

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x, y) & \longmapsto & 3x + 4y \end{array}$$

$$f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^4 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y + 2z, x + y + z, 2x + 2y + z, 3x + 3y + 3z) \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^4 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & (x + y + t, x + y + 2t, x + z) \end{array}$$

$$f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^4 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y - z, x + y - z, x - y, x - y) \end{array}$$

Éléments de correction

Éléments de correction - SVF 101

1. On a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 4 & 2a+2 & -6a+8 \\ 4 & 2 & 4a+1 & -9a+13 \\ -2 & 14 & -2a+7 & -4a+2 \end{array} \right) \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 4 & 2a+2 & -6a+8 \\ 0 & \boxed{-6} & 3 & 3a-3 \\ 0 & 18 & 9 & -19a+10 \end{array} \right) \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 4 & 2a+2 & -6a+8 \\ 0 & \boxed{-6} & -3 & 3a-3 \\ 0 & 0 & 0 & -a+1 \end{array} \right)$$

- Si $a \neq 1$, le système est incompatible.
- Si $a = 1$, on trouve comme ensemble de solutions $\{(-3a+4-az, -\frac{1}{2}z, z) : z \in \mathbf{R}\}$.

2. On a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & a+3 & 2a \\ -2 & -4 & 4a-2 & 2a+8 \\ 2 & 3 & 5 & 2a-3 \end{array} \right) \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & a+3 & 2a \\ 0 & \boxed{-2} & 6a+4 & 6a+8 \\ 0 & 1 & -2a-1 & 2a-3 \end{array} \right) \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & a+3 & 2a \\ 0 & \boxed{-2} & 6a+4 & 6a+8 \\ 0 & 0 & a+1 & a+1 \end{array} \right)$$

- Si $a \neq -1$, alors on peut continuer l'algorithme de réduction de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & a+3 & 2a \\ 0 & \boxed{-2} & 6a+4 & 6a+8 \\ 0 & 0 & a+1 & a+1 \end{array} \right) \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & a+3 & 2a \\ 0 & \boxed{-2} & 6a+4 & 6a+8 \\ 0 & 0 & \boxed{a+1} & a+1 \end{array} \right)$$

Ainsi l'ensemble des solutions est $\{(a-1, -2, 1)\}$.

- Si $a = -1$, le calcul précédent devient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{-2} & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

et donc l'ensemble des solutions est $\{(-1-z, -1-z, z) : z \in \mathbf{R}\}$.

3. On a

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{3} & 3 & -a-1 & -1 \\ -2 & -1 & a+1 & 1 \\ 1 & a+1 & -a-1 & a+1 \end{array} \right) &\sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & \frac{-a-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ -2 & -1 & a+1 & 1 \\ 1 & a+1 & -a-1 & a+1 \end{array} \right) \\ &\sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & \frac{-a-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & \boxed{1} & \frac{a+1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & a & \frac{-2a-2}{3} & \frac{3a+4}{3} \end{array} \right) \\ &\sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & \frac{-a-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & \boxed{1} & \frac{a+1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{-a^2-3a-2}{3} & \frac{2a+4}{3} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Or $\frac{-a^2-3a-2}{3} = 0 \iff a^2 + 3a + 2 = 0 \iff a \in \{-2, -1\}$.

- Si $a \in \mathbf{R} \setminus \{-2, -1\}$, on peut poursuivre le calcul précédent.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & \frac{-a-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & \boxed{1} & \frac{a+1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{-a^2-3a-2}{3} & \frac{2a+4}{3} \end{array} \right) \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & \frac{-a-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & \boxed{1} & \frac{a+1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{-2}{a+1} \end{array} \right) \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{-2}{a+1} \end{array} \right)$$

On en déduit que l'ensemble des solutions du système est $\{(-2, 1, \frac{-2}{a+1})\}$.

- Si $a = -1$, le calcul précédent devient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array} \right)$$

donc l'ensemble des solutions est $\emptyset$.

- Si $a = -2$, le calcul précédent donne :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Finalement, l'ensemble des solutions est $\left\{ \left(-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}z, \frac{1}{3} + \frac{1}{3}z \right) : z \in \mathbf{R} \right\}$.

Éléments de correction - SVF 102

1. Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$.

$$(a, b, c) \in E \iff \exists (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4, \begin{cases} x + 2y - z + t = a \\ 2x + y + z + 3t = b \\ -5x + 2z = c \end{cases}$$

On a (les calculs sont à faire ; on a choisi successivement les pivots de position (1,1), (2,2) et (3,3))

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 & a \\ 2 & \boxed{1} & 1 & 3 & b \\ -5 & 0 & \boxed{2} & 0 & c \end{array} \right) \sim_L \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 & a \\ 0 & \boxed{-3} & 3 & 1 & -2a+b \\ 0 & 0 & \boxed{7} & \frac{25}{3} & \frac{-5a+10b+3c}{3} \end{array} \right)$$

Ainsi il n'y a pas de condition de compatibilité, donc l'ensemble E ne peut être décrit par équations (on a $E = \mathbf{R}^3$).

2. Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$. Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Le système $f(x, y, z) = (a, b, c)$ se traduit à l'aide d'une matrice augmentée par (on a choisi successivement les pivots de position (1,1), (2,2) et (3,3)) :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 3 & a \\ 1 & \boxed{2} & 3 & b \\ 0 & 3 & \boxed{3} & c \end{array} \right) \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 3 & a \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -a+b \\ 0 & 0 & 0 & 3a-3b+c \end{array} \right)$$

Ainsi une équation de E est $3a - 3b + c = 0$ (et donc $E = \{(a, b, c) \in \mathbf{R}^3 \mid 3a - 3b + c = 0\}$).

Éléments de correction - SVF 103

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

$$(x, y, z) \in D_1 \iff \exists t \in \mathbf{R}, \begin{cases} 3t = x - 1 \\ -t = y \\ -5t = z - 2 \end{cases}$$

Or ce dernier système d'inconnue $t \in \mathbf{R}$ peut s'écrire à l'aide d'une matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{c|c} \boxed{3} & x-1 \\ -1 & y \\ -5 & z-2 \end{array} \right) \sim_L \left(\begin{array}{c|c} \boxed{1} & \frac{x-1}{3} \\ 0 & \frac{x+3y-1}{3} \\ 0 & \frac{5x+3z-11}{3} \end{array} \right)$$

Ainsi,

$$(x, y, z) \in D_1 \iff \begin{cases} x + 3y - 1 = 0 \\ 5x + 3z - 11 = 0 \end{cases}$$

ce qui signifie que D_1 est l'intersection des plans d'équations $-x + y + 1 = 0$ et $-x + z - 1 = 0$.

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

$$(x, y, z) \in D_2 \iff \begin{cases} x + y + z = 4 \\ -x + 3y - z = 7 \end{cases}$$

Ce dernier système peut s'écrire à l'aide d'une matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & -1 & 7 \end{array} \right) \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & \boxed{4} & 0 & 11 \end{array} \right) \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{11}{4} \end{array} \right)$$

Ainsi $D_2 = \left\{ \left(\frac{5}{4} - t, \frac{11}{4}, t \right) : t \in \mathbf{R} \right\}$.

1. Soit $a \in \mathbf{R}$. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. L'équation $f_1(x, y) = a$ se traduit par

$$\left(\boxed{3} \quad 4 \mid a \right)$$

donc $f_1(x, y) = a \iff (x, y) \in \left\{ \left(\frac{a}{3} - \frac{4}{3}y, y \right) : y \in \mathbf{R} \right\}$. En particulier, f_1 est surjective (pas de condition de compatibilité : il existe toujours au moins une solution) et non injective (infinité de solutions). Puisque f_1 est surjective, $f_1(\mathbf{R}^2) = \mathbf{R}$ et il n'y a pas d'équation pour décrire $f_1(\mathbf{R}^2)$.

2. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$. Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. L'équation $f_2(x, y, z) = (a, b, c, d)$ se traduit par (on a choisi successivement les pivots de position (1,1) et (2,3)) :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & \boxed{1} & b \\ 2 & 2 & 1 & c \\ 3 & 3 & 3 & d \end{array} \right) \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & a \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -a+b \\ 0 & 0 & 0 & a-3b+c \\ 0 & 0 & 0 & -3b+d \end{array} \right)$$

Ainsi f_2 est non injective (il y a trois inconnues et le système est de rang 2 : il y aura une inconnue secondaire, et donc on n'aura jamais unicité de la solution). De plus, f_2 est non surjective et un système d'équations cartésiennes

de $f_2(\mathbf{R}^3)$ est $\begin{cases} a-3b+c = 0 \\ -3b+d = 0 \end{cases}$ (ce qui signifie que $f(\mathbf{R}^3) = \left\{ (a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4 \mid \begin{cases} a-3b+c = 0 \\ -3b+d = 0 \end{cases} \right\}$).

3. Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$. L'équation $f_3(x, y, z, t) = (a, b, c)$ se traduit par :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 & 2 & b \\ 1 & 0 & 1 & 0 & c \end{array} \right) \sim_L \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & -1 & -a+c \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -a+b \end{array} \right)$$

Ainsi f_3 est surjective (il n'y a pas de condition de compatibilité) mais non injective (il y a 4 inconnues et le système est de rang 3, donc il y a une inconnue secondaire). Comme f_3 est surjective, $f_3(\mathbf{R}^4) = \mathbf{R}^3$ et il n'y a pas d'équation cartésienne pour décrire cet ensemble.

4. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$. Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. L'équation $f_4(x, y, z) = (a, b, c, d)$ se traduit par (on a choisit successivement les coefficients (1,1) et (2,2) comme pivots) :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & a \\ 1 & \boxed{1} & -1 & b \\ 1 & -1 & 0 & c \\ 1 & -1 & 0 & d \end{array} \right) \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & -2 & 1 & -a+c \\ 0 & 0 & 0 & -a+b \\ 0 & 0 & 0 & -c+d \end{array} \right)$$

Ainsi f n'est pas surjective et $\begin{cases} -a+b = 0 \\ -c+d = 0 \end{cases}$ est un système d'équations cartésiennes de $f(\mathbf{R}^3)$. De plus, f n'est pas injective (on a trois inconnues et le rang du système est 2).