Savez-vous faire ?

Calcul matriciel

Vous devez savoir effectuer des combinaisons linéaires et des produits de matrices de tailles compatibles et connaître la formule donnant le terme général d'un produit de matrices. Vous devez savoir déterminer si une matrice carrée est inversible et le cas échéant calculer son inverse. Vous devez pouvoir calcul la puissance n-ième de certaines matrices, en particulier savoir utiliser la formule du binôme de Newton.

SVF 105. Soient A et B deux matrices symétriques de même taille. Montrer que la matrice AB est symétrique si et seulement si A et B commutent.

SVF 106. Dire sans aucun calcul si les matrices suivantes sont inversibles ou non :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

SVF 107. Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

SVF 108. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre complexe m les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

SVF 109. Soit A une matrice carrée telle que $A^3 = 0$.

1. La matrice A est-elle inversible ?
2. On pose $B = I + A$. En exploitant la relation $A^3 = 0$, montrer que B^3 est combinaison linéaire des matrices B^2, B et I. En déduire que B est inversible.

SVF 110. Soit n un entier supérieur ou égal à 4. On note J la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients valent 1 et on note A la matrice définie par $A = J - I_n$.

1. Calculer J^2 et en déduire que A^2 est combinaison linéaire de J et de I_n.
2. En déduire que A^2 est combinaison linéaire de A et I_n.
3. Prouver que A est inversible et exprimer sa matrice inverse comme combinaison linéaire de A et de I_n.

SVF 111. A l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer la puissance n-ième des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

SVF 112. Soit n un entier naturel non nul et a un nombre complexe. On note J la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients valent 1 et A la matrice $J + aI_n$.

1. Calculer J^k pour tout $k \in \mathbf{N}$.
2. En déduire A^k pour tout $k \in \mathbf{N}$ (on écrira le résultat comme une combinaison linéaire de A et de I_n).

SVF 113. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe deux nombres réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I_2$.
2. Prouver que les suites (a_n) et (b_n) ainsi définies sont linéaires récurrentes d'ordre 2 et déterminer l'expression de leur terme général.
3. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Éléments de correction

Éléments de correction - SVF 105

La matrice AB est symétrique si et seulement si ${}^t(AB) = AB$. Or ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA = BA$ car A et B sont symétriques. Par conséquent, la matrice AB est symétrique si et seulement si $AB = BA$, ce qu'il fallait démontrer.

Éléments de correction - SVF 106

La matrice A est de rang 3 et de format $(4, 4)$, donc elle n'est pas inversible.
La matrice B est de rang 4 et de format $(4, 4)$, donc elle est inversible.

Éléments de correction - SVF 107

Après calculs (méthode du pivot), on montre que la matrice A est équivalente par lignes à la matrice I_3 donc A est inversible et son inverse est la matrice

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice B n'est pas inversible, et la matrice C est inversible d'inverse

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 7 & -2 & -4 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Éléments de correction - SVF 108

Les matrices A et B sont inversibles si et seulement si elles sont équivalentes par lignes (ou par colonnes) à la matrice I_3.
La seule condition pour le choix des pivots est de choisir un pivot **non nul** dans une ligne et une colonne sans pivot. On en déduit, après calculs, que A n'est jamais inversible (il est plus rapide de travailler sur les colonnes car la première et la troisième colonne sont égales), et que B est inversible si et seulement si $m \neq 1$ et $m \neq 2$.

Éléments de correction - SVF 109

1. Si A était inversible, on aurait $A^{-1}A^3 = 0$, donc $A^3 = 0$, puis $A^{-1}A^2 = 0$, donc $A = 0$, ce qui est absurde car 0 n'est pas inversible. La matrice A n'est donc pas inversible.
2. Remarquons que $A = B - I$. Les matrices B et $-I$ commutent donc, d'après la formule du binôme de Newton,
$$A^3 = B^3 - 3B^2 + 3B - I.$$
Or $A^3 = 0$, donc $B^3 = 3B^2 - 3B + I$.
Ainsi $B(B^2 - 3B + 3I) = I$ et $(B^2 - 3B + 3I)B = I$, donc B est inversible et $B^{-1} = B^2 - 3B + 3I$.

Éléments de correction - SVF 110

1. On obtient $J^2 = nJ$ et puisque les matrices J et $-3I_n$ commutent, on a
$$A^2 = (J - 3I_n)^2 = J^2 - 6J + 9I_n = (n - 6)J + 9I_n.$$
2. Puisque $J = A + 3I_n$, on en déduit que
$$A^2 = (n - 6)A + (3n - 9)I_n.$$
3. Or $3n - 9 \neq 0$ car $n \geqslant 4$. Donc
$$A\left(\frac{1}{3n-9}(A - (n-6)I_n)\right) = I_n \quad \text{et} \quad \frac{1}{3n-9}(A - (n-6)I_n)A = I_n.$$
Par conséquent, A est inversible et
$$A^{-1} = \frac{1}{3n-9}(A - (n-6)I_n).$$

Éléments de correction - SVF 111

Posons

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que

$$T^2 = 0, \qquad R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et que $T^k = 0$ pour tout $k \geqslant 2$, $R^k = 0$ pour tout $k \geqslant 3$.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Puisque $A = I_4 + T$ et que les matrices I_4 et T commutent, la formule du binôme de Newton donne

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T^k = \binom{n}{0} I_4 + \binom{n}{1} T = I_4 + nT.$$

On remarque que cette formule est encore valable pour $n = 0$.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Puisque $B = 2I_3 + R$ et que les matrices $2I_3$ et R commutent, la formule du binôme de Newton assure que

$$B^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} R^k = 2^n \binom{n}{0} I_3 + 2^{n-1} \binom{n}{1} R + 2^{n-2} \binom{n}{2} R^2 = 2^n I_3 + 2^{n-1} nR + 2^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} R^2.$$

On remarque que cette formule est encore valable pour $n = 0$ et pour $n = 1$.

Finalement, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3n & -n \\ 0 & 1 & 0 & 2n \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 3n2^{n-1} & 2^n & 0 \\ -n2^{n-1} + 3n(n-1)2^{n-3} & n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}.$$

Éléments de correction - SVF 112

1. On a $J^0 = I_n$ et on montre par récurrence que pour tout $k \in \mathbf{N}^\star$, $J^k = n^{k-1} J$.
2. Soit $k \in \mathbf{N}$. Les matrices J et aI_n commutent donc, d'après la formule du binôme de Newton,

$$A^k = \sum_{p=0}^{n} \binom{k}{p} a^{k-p} J^p = \binom{k}{0} a^k I_n + \left(\sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p} a^{k-p} n^{p-1} \right) J.$$

Or

$$\sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p} a^{k-p} n^{p-1} = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{k} \binom{p}{k} a^{k-p} n^p = \frac{1}{n} \left(\sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} a^{k-p} n^p - a^k \right) = \frac{1}{n} \left((a+n)^k - a^k \right).$$

Donc

$$A^k = a^k I_n + \frac{1}{n} \left((a+n)^k - a^k \right) J.$$

Éléments de correction - SVF 113

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons H_n : « il existe deux nombres réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I_2$ ».
L'assertion H_0 est vraie car $A^0 = a_0 A + b_0 I_2$ avec $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.
Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que H_n soit vraie. Il existe $(a_n, b_n) \in \mathbf{R}^2$ tel que $A^n = a_n A + b_n I_2$. Alors

$$A^{n+1} = AA^n = A(a_n A + b_n I_2) = a_n A^2 + b_n A.$$

On vérifie que $A^2 = 6A - 5I_2$, donc

$$A^{n+1} = (6a_n + b_n)A - 5a_n I_2 = a_{n+1} A + b_{n+1} I_2$$

avec $a_{n+1} = 6a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -5a_n$. Par conséquent, H_{n+1} est vraie.
Le principe de récurrence permet de conclure.

2. Pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$a_{n+1} = 6a_{n+1} + b_{n+1} = 6a_{n+1} - 5a_n \quad \text{et} \quad b_{n+2} = -5a_{n+1} = -30_n - 5b_n = 6b_{n+1} - 5b_n.$$

Les suites a et b sont donc récurrentes linéaires d'ordre 2.
Le polynôme associé à ces suites est $X^2 - 6X + 5$ et ses racines sont 5 et 1. On en déduit qu'il existe $(A, B, C, D) \in \mathbf{R}^4$ tel que

$$a_n = A5^n + B \quad \text{et} \quad b_n = C5^n + D$$

pour tout $n \in \mathbf{N}$. Or $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et $a_1 = 1$, $b_1 = 0$ donc

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad a_n = \frac{1}{4} \cdot 5^n - \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad b_n = -\frac{1}{4} \cdot 5^n + \frac{5}{4}.$$

3. Ainsi, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$A^n = \frac{1}{4}\left((5^n - 1)A + (5 - 5^n)I_2\right) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 \times 5^n & 6(1 - 5^n) \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$