Savez-vous faire ?

Limites et continuité

Vous devez connaître les différentes notions de limite pour une fonction numérique, connaître les limites de référence, et savoir reconnaître un taux d'accroissement pour lever certaines indéterminations. Vous devez savoir déterminer les points en lesquels une fonction numérique est continue, et savoir le cas échéant prolonger par continuité une fonction en une borne de son domaine de définition.

Vous devez connaître et savoir utiliser les théorèmes concernant les fonctions continues : théorème des valeurs intermédiaires, théorème de la bijection monotone et le théorème donnant l'image d'un segment par une fonction continue.

SVF 114. Déterminer les limites des fonctions suivantes au point a indiqué.

$$f_1 : x \longmapsto \frac{\sin(3\sqrt{x})}{\sqrt{2x}} \qquad a = 0 \qquad\qquad f_2 : x \longmapsto x^6 \exp\left(\frac{3}{x^2}\right) \qquad a = 0$$

$$f_3 : x \longmapsto \frac{x^3 - 6x + 4}{x^2 - 5x + 6} \qquad a = 2 \qquad\qquad f_4 : x \longmapsto \sqrt{x+3} - \sqrt{x-5} \qquad a = +\infty$$

$$f_5 : \longmapsto \frac{\ln(x^2)}{x - 1} \qquad a = 1 \qquad\qquad f_6 : x \longmapsto \frac{2^x + x^3}{x^2 - \ln(3x)} \qquad a = +\infty$$

SVF 115. Les fonctions suivantes sont-elles continues sur leur domaine de définition ?

$$f : x \longmapsto \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 3x^2 + \mathrm{e}^{-x} & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases} \qquad\qquad g : x \longmapsto \begin{cases} \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor & \text{si} \quad x > 0 \\ 3x^2 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

SVF 116. Peut-on prolonger par continuité les fonctions suivantes aux bornes finies de leur domaine de définition ?

$$f_1 : x \longmapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right) \qquad f_2 : x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \sin(3x) \qquad f_3 : x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{3x} - 1}{2x}$$

$$f_4 : x \longmapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{3}{x}\right) \qquad f_5 : x \longmapsto \frac{6\operatorname{Arcsin}(x) - \pi}{2x - 1} \qquad f_6 : x \longmapsto (1 + 3x)^{\frac{1}{x}}$$

SVF 117. Soient f et g deux fonctions numériques définies et continues sur un intervalle I. On suppose que $f < g$.

1. Supposons dans cette question que $I = [0\,;\,1]$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}_+^\star$ tel que $f(x) + \lambda \leqslant g(x)$ pour tout $x \in [0\,;\,1]$.
2. Le résultat de la question précédente est-il encore valable si $I =]0\,;\,1]$?

SVF 118. Soit f une fonction numérique continue en 0 et en 1 vérifiant $f(x) = f(x^2)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Montrer que f est paire puis que f est constante.

SVF 119. Soit f une fonction numérique et continue sur $\mathbf{R}$. On suppose que f tend vers -1 en $-\infty$ et que f tend vers 1 en $+\infty$. Montrer que f s'annule au moins une fois sur $\mathbf{R}$.

SVF 120. Soit f une fonction numérique définie et continue sur le segment $[0\,;\,1]$.

1. On suppose dans cette question que $f([0\,;\,1]) \subset [0\,;\,1]$. Montrer que f admet au moins un point fixe sur $[0\,;\,1]$.
2. Montrer que pour tout $a, b \in \mathbf{R}_+^\star$, il existe $c \in [0\,;\,1]$ tel que $af(0) + bf(1) = (a+b)f(c)$.

SVF 121. Soient f et g deux fonctions numériques définies et continues sur un segment $[a\,;\,b]$. On suppose que $f([a\,;\,b]) \subset g([a\,;\,b])$. Montrer qu'il existe $c \in [a\,;\,b]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Éléments de correction

Éléments de correction - SVF 114

$$\lim_{x\to 0} f_1(x) = \frac{3}{\sqrt{2}} \qquad \lim_{x\to 0} f_2(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2} f_2(x) = -6 \qquad \lim_{x\to +\infty} f_4(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 1} f_5 - x) = 2 \qquad \lim_{x\to +\infty} f_6(x) = +\infty$$

Éléments de correction - SVF 115

La fonction f est continue sur $\mathbf{R}^\star$ car au voisinage de tout point de $\mathbf{R}^\star$, f s'écrit comme somme, composée, quotient de fonctions usuelles continues sur leur domaine de définition. De plus, la limite de f en 0^+ est égale à la limite de f en 0^-, et ces deux limites sont 1, la valeur de f en 0. Donc f est continue en 0. Finalement, f est continue sur $\mathbf{R}$.

La fonction g n'est pas continue sur son domaine de définition, car elle n'est pas continue en $\frac{1}{2}$ par exemple : en effet, la limite de f en $\frac{1}{2}^-$ est 2, alors que la limite de f en $\frac{1}{2}^+$ est 1.

Éléments de correction - SVF 116

1. On ne peut pas prolonger f_1 par continuité en 0 : en effet, la fonction f_1 n'a pas de limite en 0 car $f_1(\frac{1}{2n\pi}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $f_1(\frac{1}{2n\pi+\pi/2}) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors que les suites de terme général $\frac{1}{2n\pi}$ et $\frac{1}{2n\pi+\pi/2}$ convergent vers 0.
2. On prolonge la fonction f_2 par continuité en 0 en posant $f_2(0) = 0$.
3. On prolonge la fonction f_3 par continuité en 0 en posant $f_3(0) = \frac{3}{2}$.
4. On ne peut pas prolonger la fonction f_4 par continuité en 0 car la limite de f_4 en 0^+ est $\frac{\pi}{2}$ et la limite de f_4 en 0^- est $-\frac{\pi}{2}$: f_4 n'a donc pas de limite en 0.
5. On prolonge la fonction f_5 par continuité en $\frac{1}{2}$ en posant $f_5(\frac{1}{2}) = 2\sqrt{3}$.
6. On prolonge la fonction f_6 par continuité en 0 en posant $f_6(0) = \mathrm{e}^3$ mais pas en $-\frac{1}{3}$ puisque $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}} f_6(x) = +\infty$.

Éléments de correction - SVF 117

1. La fonction $g - f$ est continue sur le segment $[0\,;\,1]$. Elle est donc bornée et atteint ses bornes sur ce segment : il existe $a, b \in [0\,;\,1]$ tels que $(g-f)(a) \leqslant (g-f)(x) \leqslant (g-f)(b)$ pour tout $x \in [0\,;\,1]$. Posons $\lambda = (g-f)(a)$. Puisque $f < g$, le nombre réel λ est strictement positif. Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $\lambda \leqslant g(x) - f(x)$, donc $f(x) + \lambda \leqslant g(x)$.
2. Le raisonnement précédent ne s'applique plus si $I =]0\,;\,1]$, car $]0\,;\,1]$ n'est pas un segment. Par exemple, si $f : x \longmapsto 1$ et si $g : x \longmapsto 1 + x$, alors $f < g$ sur I et il n'existe pas de nombre réel λ strictement positif tel que $f(x) + \lambda \leqslant g(x)$ pour tout $x \in I$, car si c'était le cas, en faisant tendre x vers 0 dans l'inégalité précédente, on aurait $1 + \lambda \leqslant 1$, ce qui est absurde.

Éléments de correction - SVF 118

Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors $f(-x) = f((-x)^2) = f(x^2) = f(x)$. La fonction f est donc paire.

Soit $x > 0$. Notons u la suite de terme général $u_n = x^{\frac{1}{2^n}}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(u_{n+1}^2) = u_n$, donc $fu_n) = f(u_{n+1}^2) = f(u_{n+1})$. La suite $(f(u_n))$ est donc constante : on en déduit que $f(u_n) = f(x)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
Or la suite u converge vers 1 car pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \exp(\frac{1}{2^n}\ln(x))$. La fonction f étant continue en 1, on en déduit que la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(1)$.
Par passage à la limite dans l'égalité $f(u_n) = f(x)$ valable pour tout $n \in \mathbf{N}$, on en déduit que $f(1) = f(x)$.
Donc f est constante sur $\mathbf{R}_+^\star$, égale à $f(1)$.
Par parité, on en déduit que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^\star$, $f(x) = f(1)$. Enfin, la fonction f étant continue en 0, $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(1)$.

Donc f est constante.

Éléments de correction - SVF 119

Posons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Puisque f tend vers 1 en $+\infty$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $x \geqslant A$, $1 - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant 1 + \varepsilon$ et puisque f tend vers -1 en $-\infty$, il existe $B < 0$ tel que pour tout $x \leqslant B$, $-1 - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant -1 + \varepsilon$.
En particulier $f(A) \geqslant 1 - \varepsilon > 0$ et $f(B) \leqslant -1 - \varepsilon < 0$.
La fonction f est continue sur $[B\,;\,A]$. De plus, $f(B) < 0$ et $f(A) > 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure alors que f s'annule : il existe $c \in [B\,;\,A]$ tel que $f(c) = 0$.

Éléments de correction - SVF 120

1. On étudie la fonction $g : x \longmapsto f(x) - x$. Cette fonction est continue sur $[0\,;\,1]$, positive en 0 car $f(0) \geqslant 0$ et négative en 1 car $f(1) \leqslant 1$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure que la fonction g s'annule au moins une fois sur $[0\,;\,1]$: par conséquent, la fonction f admet au moins un point fixe sur $[0\,;\,1]$.
2. Introduisons $h : x \longmapsto af(0) + bf(1) - (a+b)f(x)$. La fonction h est continue sur $[0\,;\,1]$. De plus,

$$h(0)h(1) = b(f(1) - f(0))a(f(0) - f(1)) = -ab(f(1) - f(0))^2.$$

   Les nombres a et b étant positifs, on en déduit que la fonction h change de signe. Le théorème des valeurs intermédiaires assure alors qu'il existe $c \in [0\,;\,1]$ tel que $h(c) = 0$. Ainsi,

$$af(0) + bf(1) = (a+b)f(c).$$

Éléments de correction - SVF 121

Posons $h : x \longmapsto f(x) - g(x)$. La fonction g est continue sur le segment $[a\,;\,b]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes sur ce segment : il existe $c, d \in [a\,;\,b]$ tels que $g(c) \leqslant g(x) \leqslant g(d)$ pour tout $x \in [a\,;\,b]$. Or $f([a\,;\,b]) \subset g([a\,;\,b])$: on en déduit que $g(c) \leqslant f(x) \leqslant g(d)$ pour tout $x \in [a\,;\,b]$.
En particulier, $h(c) \geqslant 0$ et $h(d) \leqslant 0$. De plus, h est continue sur $[a\,;\,b]$.
Le théorème des valeurs intermédiaires assure alors qu'il existe $e \in [a\,;\,b]$ tel que $h(e) = 0$. On a ainsi $f(e) = g(e)$.