Savez-vous faire ?

Dérivabilité

Vous devez savoir déterminer les points en lesquels une fonction numérique est dérivable, en étudiant si nécessaire la limite du taux d'accroissement. Vous devez bien évidemment connaître les dérivées des fonctions usuelles, et savoir dériver les fonctions construites à partir de ces fonctions usuelles (vérifiez que vous savez également quand et comment on peut dériver une fonction réciproque).

Sur certains exemples, vous devez pouvoir calculer la dérivée n-ième d'une fonction (pensez à la formule de Leibniz, et éventuellement aux fonctions à valeurs complexes).

Vous devez connaître le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis. Vous devez savoir utiliser l'inégalité des accroissements finis, en particulier pour démontrer qu'une fonction est lipschitzienne. Vous devez pouvoir exploiter le caractère contractant d'une fonction f pour étudier les suites vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Enfin, vous devez savoir utiliser le théorème de la limite de la dérivée.

SVF 122. Déterminer les points en lesquels la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \left|\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x\right| - 2$ est dérivable.

SVF 123. Pour chaque fonction suivante, déterminer les valeurs des nombres réels a et b pour qu'elle soit dérivable sur son domaine de définition.

$$f_1 : x \longmapsto \begin{cases} x\mathrm{e}^x & \text{si} \quad x \leqslant 1 \\ ax + b & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad f_2 : x \longmapsto \begin{cases} \frac{x}{x-1} & \text{si} \quad x < 0 \\ ax + b - c\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases}.$$

SVF 124. Introduisons la fonction f définie par

$$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x-5}\right).$$

1. Déterminer le domaine de définition I de f puis démontrer que f réalise une bijection de I sur son image J que l'on déterminera. On note g sa fonction réciproque.
2. Déterminer le domaine de dérivabilité de la fonction g. Calculer $g(1)$ et $g'(1)$.

SVF 125.

1. Montrer que pour tout entier naturel k strictement supérieur à 1,

$$0 \leqslant \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) \leqslant \frac{1}{k\ln(k)}.$$

2. En déduire que la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$$

diverge vers $+\infty$.

SVF 126. Montrer que les fonctions suivantes sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur domaine de définition et donner l'expression de leur dérivée n-ième.

$$f_1 : x \longmapsto \ln(3x+1) \qquad f_2 : x \longmapsto \sin^3(x)\cos(x) \qquad f_3 : x \longmapsto (2x^2 - 5x + 6)\cos(3x)$$

$$f_4 : x \longmapsto \sin(\sqrt{3}x)\mathrm{e}^x \qquad f_5 : x \longmapsto \frac{1}{x^2 - 5x + 6} \qquad f_6 : x \longmapsto \sqrt{x+3}$$

SVF 127.

1. Montrer que l'équation $\mathrm{e}^x - x = 2$ a exactement deux solutions sur $\mathbf{R}$. On note α la plus petite de ces solutions.
2. Montrer que α appartient à $I =]-\infty\,;\ln(2)]$.
3. Notons h la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^x - 2$. Montrer que h est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur I.
4. En déduire que la suite définie par la donnée de $u_0 \in I$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = h(u_n)$ converge vers α.

SVF 128. Montrer que la fonction f définie sur $]-1\,;1[$ par $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-x^4}}{x}$ peut être prolongée par continuité en 0 et prouver que la fonction ainsi prolongée est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1\,;1[$.

Éléments de correction

Éléments de correction - SVF 122

Composée de fonctions dérivables sur leur domaine de définition, exceptée la fonction $x \longmapsto |x|$ qui n'est pas dérivable en 0, la fonction f est dérivable en tout point $x \in \mathbf{R}$ tel que $e^{2x} - e^x \neq 0$. Par conséquent, f est dérivable sur $\mathbf{R}^\star$.

La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Soit $x > 0$. Alors

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{e^{2x} - e^x}{x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 1$$

car il s'agit du taux d'accroissement en 0 de la fonction $f : x \longmapsto e^{2x} - e^x$. Donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 1$.
De manière analogue, on montre que f est dérivable à gauche en 0 avec $f'_g(0) = -1$.
Puisque $f'_g(0) \neq f'_d(0)$, la fonction f n'est pas dérivable en 0.

Éléments de correction - SVF 123

La fonction f_1 est dérivable en 1 si et seulement si $a = 2e$ et $b = -e$.
La fonction f_2 est dérivable en 0 si et seulement si $a = -\frac{3}{2}$ et $b = 1$.

Éléments de correction - SVF 124

1. La fonction f est définie sur $]1\,;\,5[$ et pour tout $x \in]1\,;\,5[$, $f(x) = \ln(x-1) - \ln(5-x)$. La fonction $x \longmapsto \ln(x-1)$ est strictement croissante car composée de deux fonctions strictement croissantes. La fonction $x \longmapsto \ln(5-x)$ est décroissante car composée de deux fonctions de sens de variation contraires. Donc f est strictement croissante sur $]1\,;\,5[$. Strictement croissante et continue, elle réalise une bijection de $]1\,;\,5[$ sur son image $\left] \lim\limits_{x\to 1} f(x)\,;\, \lim\limits_{x \to 5} f(x) \right[= \mathbf{R}$.
2. La fonction f est dérivable sur $]1\,;\,5[$. D'après le théorème de dérivabilité des fonctions réciproques, la fonction g est dérivable en tout point y de son domaine de définition $\mathbf{R}$ tel que $f'(g(y)) \neq 0$.
   Or la fonction f' s'annule uniquement en 3 et pour tout $y \in \mathbf{R}$, $g(y) = 3 \iff y = f(3) \iff y = 0$. Par conséquent, la fonction g est dérivable sur $\mathbf{R}^\star$.
   De plus, $g(1) = \frac{1}{1+5e}1 + e$ car pour tout $x \in]1\,;\,5[$,
   $$g(1) = x \iff 1 = f(x) \iff e = \frac{1-x}{x-5}.$$
   Alors
   $$g'(1) = \frac{1}{f'(g(1))} = \frac{(g(1)-1)(g(1)-5)}{2g(1)-6} = \frac{4e}{1-e^2}.$$

Éléments de correction - SVF 125

1. Il suffit pour tout $k \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$ d'appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction $x \longmapsto \ln(\ln(x))$ sur l'intervalle $[k\,;\,k+1]$.
2. Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$. En sommant les inégalités précédemment obtenues pour $k \in [\![2, n]\!]$, on obtient
   $$\sum_{k=2}^{n} ((\ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k))) \leqslant S_n.$$
   Or la somme de gauche est une somme télescopique. On en déduit que
   $$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \leqslant S_n.$$
   Le théorème de minoration assure alors que $(S_n)_{n \geqslant 2}$ diverge vers $+\infty$.

Éléments de correction - SVF 126

1. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$,
$$f_1^{(n)} : x \longmapsto 3^n(-1)^{n-1}(n-1)!(3x+1)^{-n}.$$
2. En linéarisant l'expression, on obtient $f_2 : x \longmapsto -\frac{1}{8}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x)$. On montre alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$f_2^{(n)}(x) = -\frac{4^n}{8}\sin\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2^n}{4}\sin\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right).$$
3. En utilisant la formule de Leibniz, on obtient pour tout $n \in \mathbf{N}$, pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$f_3^{(n)}(x) = (2x^2-5x+6)3^n\cos\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right) + n(4x-5)3^{n-1}\cos\left(3x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) + 2n(n-1)3^{n-2}\cos\left(3x + \frac{(n-2)\pi}{2}\right).$$
4. On remarque que $f_4 = \mathfrak{Im}(g)$, où $g : x \longmapsto \mathrm{e}^{(1+i\sqrt{3})x}$ et on montre aisément par récurrence que
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad g^{(n)} : x \longmapsto (1+i\sqrt{3})^n \mathrm{e}^{(1+i\sqrt{3})x}.$$
En prenant la partie imaginaire de cette fonction, on obtient pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$f_4^{(n)} : x \longmapsto 2^n \mathrm{e}^x \left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\sin(\sqrt{3}x) + \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\cos(\sqrt{3}x)\right).$$
5. On remarque que $f_5 : x \longmapsto \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}$. On montre alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$f_5^{(n)} : x \longmapsto (-1)^n n!\left((x-3)^{-n-1} - (x-2)^{-n-1}\right).$$
6. Par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$f_6^{(n)} : x \longmapsto \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}(1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3))(x+3)^{-\frac{2n-1}{2}}.$$

Éléments de correction - SVF 127

1. On montre que la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^x - x - 2$ est strictement décroissante sur $\mathbf{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$. De plus, f tend vers $+\infty$ en $-\infty$, $f(0) = -2$ et f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
On utilise alors le théorème de la bijection pour montrer que f s'annule une unique fois sur $\mathbf{R}_-$ et une unique fois sur $\mathbf{R}_+$, ce qui prouve que l'équation $\mathrm{e}^x - x = 2$ admet exactement deux solutions sur $\mathbf{R}$.
2. Puisque $f(-\ln(2)) = \ln(2) - \frac{3}{2} < 0$, alors $f(\alpha) > f(-\ln(2))$. Puisque f est strictement décroissante sur $\mathbf{R}_-$ et que les deux nombres réels α et $-\ln(2)$ appartient à $\mathbf{R}_-$, on en déduit que $\alpha < -\ln(2)$.
3. La fonction h est dérivable sur I et $h' : x \longmapsto \mathrm{e}^x$. La fonction h' est croissante sur I donc pour tout $x \in I$, $0 \leqslant h'(x) \leqslant \mathrm{e}^{-\ln(2)}$. Ainsi, pour tout $x \in I$, $|h'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$. L'inégalité des accroissements finis permet alors d'affirmer que f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur I.
4. On montre dans un premier temps que $h(I) \subset I$ (en effet, h est croissante sur I donc pour tout $x \in I$, $-2 = \lim_{-\infty} h \leqslant h(x) \leqslant h(-\ln(2)) = -\frac{3}{2} \leqslant -\ln(2)$).
Or $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = h(u_n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Ainsi, une récurrence immédiate assure que $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors $|u_{n+1} - \alpha| = |h(u_n) - h(\alpha)|$. Or $u_n, \alpha \in I$ et h est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur I, donc $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
On montre alors par récurrence que $|u_n - \alpha| \leqslant (\frac{1}{2})^n|u_0 - \alpha|$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Or $((\frac{1}{2})^n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0, donc le théorème des gendarmes assure que $(|u_n - \alpha|)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0, ce qui prouve que u converge vers α.

Éléments de correction - SVF 128

En multipliant par la quantité conjuguée, on obtient, pour $x \neq 0$,

$$f(x) = \frac{x^3}{1+\sqrt{1-x^4}}.$$

Par conséquent, f tend vers 0 en 0 : on prolonge f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1\,;1[\setminus\{0\}$ car elle est construite sur $]-1\,;0[$ et sur $]0\,;1[$ comme quotient et composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur leur domaine de définition, exceptée la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ qui n'est pas dérivable en 0, mais $1-x^4 \neq 0$ pour tout $x \in]-1\,;1[\setminus\{0\}$.

De plus, pour tout $x \in]-1\,;1[\setminus\{0\}$,

$$f'(x) = \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^4}} - \frac{1-\sqrt{1-x^4}}{x^2} = \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^4}} - \frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^4}}.$$

On en déduit que f' tend vers 0 en 0.
La fonction f est continue sur $]-1\,;1[$, dérivable sur $]-1\,;1[\setminus\{0\}$ et f' tend vers 0 en 0. Le théorème de la limite de la dérivée assure que f est dérivable en 0, que $f'(0) = 0$ et que f' est continue en 0.

Finalement, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1\,;1[$.