
Savez-vous faire ?

Probabilités

SVF 129. Dans une urne se trouvent quatre boules noires et deux boules blanches. Cinq personnes tirent successivement (sans remise) une boule dans l'urne. Le premier qui tire une boule blanche a gagné. Quelle est la probabilité de gain pour chaque personne ?

SVF 130. Dans un petit pays, les numéros de téléphone sont constitués de seulement six chiffres. On compose un tel numéro au hasard. Calculer les probabilités des événements suivants.

1. A : « le numéro composé commence ».
2. B : « le numéro composé est constitué de six chiffres distincts ».
3. C : « le numéro composé contient exactement deux fois le chiffre 5 ».
4. D : « le numéro composé ne contient que des chiffres pairs ».
5. E : « le numéro composé a ses six chiffres en ordre strictement croissant ».

SVF 131. Dans une urne sont placées 15 boules vertes et 10 boules blanches. On tire successivement (sans remise) cinq boules dans l'urne. Calculer les probabilités des événements suivants.

1. A : « on obtient cinq boules vertes ».
2. B : « on obtient au plus une boule blanche ».
3. C : « on obtient trois boules vertes et deux blanches ».

Reprendre l'exercice avec des tirages avec remise.

SVF 132. Une guerre sévit depuis des années entre deux pays voisins. Les habitants du pays A sont à 60% favorables à la paix et à 16 % favorables à la guerre (le reste étant sans opinion) ; par contre dans le pays B, 68% des habitants sont pour la guerre et 12 % sont pour la paix. On rencontre un individu sans savoir quel pays il habite (une chance sur deux pour chaque).

1. Calculer la probabilité qu'il soit sans opinion.
2. Il est favorable à la guerre, quelle est la probabilité qu'il habite le pays A ?
3. Même question s'il est favorable à la paix.

SVF 133. Un élève de prépa ayant décidé de vraiment s'aérer l'esprit pendant les vacances s'est programmé une semaine de farniente aux îles de Bayes, au cœur de l'océan des Mathématiques. Cette destination peu prisée des touristes n'est desservie que par une unique compagnie aérienne, dont la fiabilité laisse malheureusement quelque peu à désirer. Sur les avions de cette compagnie, chaque moteur a une probabilité p (inconnue) de tomber en panne pendant le vol (les différents moteurs ont un comportement indépendant les uns des autres). Tout avion est amené à s'écraser si (au moins) la moitié de ses moteurs tombe en panne pendant le vol.

1. On s'intéresse pour l'instant au cas d'un avion à deux moteurs. Montrer que la probabilité qu'au moins l'un de ses deux moteurs tombe en panne vaut $p(2-p)$.
2. En déduire la probabilité que l'avion à deux moteurs arrive à bon port (on notera A cet événement).
3. On considère désormais un avion à quatre moteurs. En notant M_1 l'événement « le moteur n°1 tombe en panne » et similairement pour les trois autres moteurs, décrire l'événement B : « l'avion va s'écraser durant le vol » à l'aide des événements M_i .
4. En déduire $\mathbb{P}(B)$ (attention à ne pas compter plusieurs fois certains cas).
5. Factoriser $\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$, et déterminer son signe en fonction de p .
6. Qu'obtient-on lorsque $p = 0$ ou $p = 1$? Expliquer ce résultat d'un point de vue probabiliste.
7. Si notre préparateur a le choix entre un avion à deux moteurs et un avion à quatre moteurs, lequel lui conseillez-vous (on pourra distinguer des cas selon la valeur de p) ?
8. Notre préparateur ayant finalement renoncé à risquer sa vie pour partir à la plage, il se demande ce que donnerait la comparaison de l'avion à quatre moteurs avec un troisième avion à six moteurs. Pouvez-vous l'aider (il faut vraiment que vous ayez vous-même du temps à perdre) ?

SVF 134. Une guêpe entre par inadvertance dans un appartement composé de deux pièces A et B . Elle est dans la pièce A à l'instant $t = 0$ et évolue ainsi : si elle est en A à l'instant $t = n \in \mathbf{N}$, elle reste en A avec une probabilité $\frac{1}{3}$ ou passe en B avec une probabilité $\frac{2}{3}$ à l'instant $t = n + 1$. Si elle est en B , elle retourne en A avec une probabilité $\frac{1}{4}$, reste en B avec probabilité $\frac{1}{2}$ et sort de l'appartement avec probabilité $\frac{1}{4}$. Si elle est dehors, elle y reste. On note A_n ((resp. B_n, C_n) « la guêpe est en A (resp. en B , dehors) à l'instant n »).

1. Déterminer $a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2$ et c_2 .
2. Exprimer, a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .
3. Montrer que $\frac{6}{10}a - \frac{3}{10}b$ est une suite constante à partir du rang 1.
4. Montrer que $\frac{4}{10}a + \frac{3}{10}b$ est une suite géométrique.
5. En déduire les expressions de $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$.
6. Quelle est l'expression de $(c_n)_{n \in \mathbf{N}}$?

Éléments de correction

Éléments de correction - SVF 129

La probabilité que le premier joueur gagne vaut $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Pour le deuxième joueur, il faut que le premier joueur tire une boule noire puis que lui-même tire une boule blanche sur les cinq boules restant dans l'urne, soit une probabilité $\frac{4}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$. De même, le troisième joueur gagne avec probabilité $\frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{5}$, le quatrième avec une probabilité $\frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$. Enfin le dernier joueur gagne avec une probabilité $\frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{1}{15}$.

Notons que la somme de cinq probabilités vaut 1 ce qui est tout à fait normal puisqu'il y a quatre boules noires dans l'urne, ce qui implique qu'un des cinq joueurs doit gagner.

Éléments de correction - SVF 130

On note Ω l'univers (l'ensemble des numéros de téléphone). On a $\text{Card}(\Omega) = 10^6$.

1. $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{10^4}{10^6} = \frac{1}{100}$.
2. $\mathbb{P}(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{10^6}$.
3. On commence par choisir la position de deux 5 ($\binom{6}{2}$ possibilités) puis les valeurs des autres chiffres (9^4 possibilités) : $\mathbb{P}(C) = \frac{9^4 \times \binom{6}{2}}{10^6}$.
4. $\mathbb{P}(D) = \frac{5^6}{10^6}$.
5. On choisit simultanément six chiffres ($\binom{10}{6}$ possibilités) puis on les ordonne (1 possibilité) : $\mathbb{P}(E) = \frac{\binom{10}{6}}{10^6}$.

Éléments de correction - SVF 131

- (A) On choisit Ω comme l'ensemble des sous-ensembles à 5 éléments de l'ensemble des 25 boules de l'urne. Donc $\text{Card}(\Omega) = \binom{25}{5}$.
1. $\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{15}{5}}{\binom{25}{5}}$.
 2. On disjoint : il y a $\binom{15}{4} \times \binom{10}{1}$ tirages constitués de 4 boules vertes et 1 boule rouge, et $\binom{15}{5}$ tirages constitués de 5 boules vertes. Ainsi, $\mathbb{P}(B) = \frac{\binom{15}{4} \times \binom{10}{1} + \binom{15}{5}}{\binom{25}{5}}$.
 3. $\mathbb{P}(C) = \frac{\binom{15}{3} \times \binom{10}{2}}{\binom{25}{5}}$.
- (B) On choisit Ω comme l'ensemble des 5-listes de l'ensemble des 25 boules de l'urne. Donc $\text{Card}(\Omega) = 25^5$.
1. $\mathbb{P}(A) = \frac{15^5}{25^5}$.
 2. On disjoint à nouveau. Notons B_1 l'ensemble des tirages avec 4 boules vertes et 1 boule blanche, B_2 l'ensemble des tirages avec 5 boules vertes, de sorte que $B = B_1 \cup B_2$ (union disjointe).
Dénombrons B_1 . On commence par choisir la position de la boule blanche (5 possibilités), les boules vertes (15^4 possibilités) et la boule blanche (10 possibilités). Donc $\text{Card}(B_1) = 5 \times 15^4 \times 10$.
De plus, $\text{Card}(B_2) = 15^5$, donc $\mathbb{P}(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{Card}(B_1) + \text{Card}(B_2)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{5 \times 15^4 \times 10 + 15^5}{25^5}$.
 3. On choisit les positions des boules blanches ($\binom{5}{2}$ possibilités), puis les trois boules vertes (15^3 possibilités) et enfin les deux boules blanches (10^2 possibilités) : $\mathbb{P}(C) = \frac{\binom{5}{2} \times 15^3 \times 10^2}{25^5}$.

Éléments de correction - SVF 132

Notons S : « l'individu est sans opinion », P : « il est favorable à la paix » et G : « il est favorable à la guerre ». On notera également A et B les événements correspond à l'appartenance à l'un des deux pays.

1. On a $\mathbb{P}_A(S) = 1 - \mathbb{P}_A(G) - \mathbb{P}_A(P) = 0,24$ et de même $\mathbb{P}_B(S) = 0,2$. Ainsi, avec la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(S) + \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(S) = 0,22.$$

2. On a $\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(G) + \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(G) = 0,42$. Avec la formule de Baye, on en déduit

$$\mathbb{P}_G(A) = \frac{\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(G)}{\mathbb{P}(G)} = \frac{0,5 \times 0,16}{0,42}.$$

3. Comme avant, on obtient $\mathbb{P}(P) = 0,36$ puis $\mathbb{P}_P(A) = \frac{\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(P)}{\mathbb{P}(P)} = \frac{0,5 \times 0,6}{0,36}$.

Éléments de correction - SVF 133

1. On utilise les notations de la question 3. On a $\mathbb{P}(M_1) = \mathbb{P}(M_2) = p$ et, par indépendance des deux moteurs, $\mathbb{P}(M_1 \cap M_2) = p^2$. On en déduit $\mathbb{P}(M_1 \cup M_2) = \mathbb{P}(M_1) + \mathbb{P}(M_2) - \mathbb{P}(M_1 \cap M_2) = p(2 - p)$.
2. Puisque l'avion à deux moteurs s'écrase dès qu'au moins l'un des deux moteurs tombe en panne, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(M_1 \cup M_2) = 1 - p(2 - p)$.
3. L'avion s'écrase dès qu'au moins deux des moteurs tombent en panne, d'où

$$B = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3) \cup (M_1 \cap M_4) \cup (M_2 \cap M_3) \cup (M_2 \cap M_4) \cup (M_3 \cap M_4).$$

4. On disjoint en introduisant B_i : « i moteurs exactement parmi les quatre tombent en panne ». On a $B = B_2 \cup B_3 \cup B_4$ et cette union est disjointe. Or, puisque les moteurs sont indépendants, $\mathbb{P}(B_4) = p^4$. De plus, pour dénombrer B_3 on commence par choisir le moteur qui ne tombe pas en panne ($\binom{4}{1} = 4$ possibilités), d'où $\mathbb{P}(B_3) = 4p^3(1-p)$. De même, $\mathbb{P}(B_2) = \binom{4}{2}p^2(1-p)^2 = 6p^2(1-p)^2$. Finalement, $\mathbb{P}(B) = p^4 + 4p^3(1-p) + 6p^2(1-p)^2$.
5. On obtient $\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(\overline{B}) = 1 - 2p(1-p) - 1 + p^4 + 4p^3(1-p) + 6p^2(1-p) = p(p-1)^2(p - \frac{2}{3})$. Ainsi, avec une étude de signe, on en déduit que $\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(\overline{B}) \geq 0 \iff p \in [\frac{2}{3}; 1]$.

- Avec le calcul précédent, on constate que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\overline{B})$ si $p \in \{0, 1\}$. En effet, lorsque $p = 0$ les moteurs ne tombent jamais en panne (peu importe combien il y en a, on arrivera toujours à bon port). Au contraire, lorsque $p = 1$, tous les moteurs tombent en panne (peu importe l'avion, il se crashe).
- Avec la question 5, on obtient que si $p \leq \frac{2}{3}$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(\overline{B})$, donc l'avion à deux moteurs est moins fiable que l'avion à quatre moteurs, il est donc préférable d'opter pour ce dernier. Par contre, si $p \geq \frac{2}{3}$, et en supposant qu'on tienne encore à effectuer le voyage, il vaudra mieux prendre l'avion à deux moteurs (dans ce cas, on aura moins d'une chance sur neuf d'arriver vivant).
- Notons C l'événement « l'avion à six moteurs s'écrase ». En procédant comme avant, on obtient

$$\mathbb{P}(C) = \binom{6}{3} p^3 (1-p)^3 + \binom{6}{4} p^4 (1-p)^2 + \binom{6}{5} p^5 (1-p) + p^6 = 20p^3 - 45p^4 + 36p^5 - 10p^6,$$

puis $\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(C) = p^2(p-1)^3(p-\frac{3}{5})$. Après étude de signe, on montre que si $p \leq \frac{3}{5}$, $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(C)$ ce qui prouve que l'avion à six moteurs est le meilleur. Pour $p \geq \frac{3}{5}$, l'avion à quatre moteurs l'emporte sur le six moteur. Avec l'étude précédente, on conclut alors que pour $p \in [0; \frac{3}{5}]$, le six moteur l'emporte, puis c'est le quatre moteurs le meilleur pour $p \in [\frac{3}{5}; \frac{2}{3}]$ et enfin le bimoteur pour $p \in [\frac{2}{3}; 1]$.

Éléments de correction - SVF 134

- On a $a_0 = 1$, $b_0 = c_0 = 0$ puisque la guêpe se trouve dans la pièce A au départ. Ensuite, d'après l'énoncé, $a_1 = \frac{1}{3}$, $b_1 = \frac{2}{3}$ et $c_1 = 0$. Pour les valeurs restantes, on utilise la formule des probabilités totales

$$a_2 = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) + \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(A_2) + \mathbb{P}(C_1) \times \mathbb{P}_{C_1}(A_2) = \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{4}b_1 = \frac{5}{18}.$$

De même, $b_2 = \frac{5}{9}$ et $c_2 = \frac{1}{6}$. Notons qu'on a bien $a_2 + b_2 + c_2 = 1$.

- En généralisant ce qui a été fait à la question précédente, on obtient $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n$, $b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n$ et $c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + c_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Notons $u = \frac{6}{10}a - \frac{3}{10}b$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} = \frac{6}{10}a_{n+1} - \frac{3}{10}b_{n+1} = \frac{6}{10} \left(\frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n \right) - \frac{3}{10} \left(\frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n \right) = 0$$

donc u est nulle à partir du rang 1.

- Posons $v = \frac{4}{10}a + \frac{3}{10}b$. Soit $n \in \mathbb{N}$?

$$v_{n+1} = \frac{4}{10}a_{n+1} + \frac{3}{10}b_{n+1} = \frac{5}{6} \left(\frac{4}{10}a_n + \frac{3}{10}b_n \right).$$

Donc v est géométrique de raison $\frac{5}{6}$.

- On déduit de la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{2}{5} \times (\frac{5}{6})^n$. Or $u + v = a$. et u est nulle à partir du rang 1, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{2}{5} \times (\frac{5}{6})^n$. En utilisant encore que u est nulle à partir du rang 1, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = 2a_n = \frac{4}{5} \times (\frac{5}{6})^n$.
- Avec la question précédente, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = 1 - a_n - b_n = 1 - (\frac{5}{6})^{n-1}$. On remarque que cette probabilité tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$: la guêpe sortira presque sûrement !