
Savez-vous faire ?

Polynômes

SVF 135. Factoriser chacun des polynômes suivants dans $\mathbf{R}[X]$ et dans $\mathbf{C}[X]$.

1. $P = X^4 - 1$.
2. $P = X^4 - 5X^3 + 4X^2 + 3X + 9$ (ce polynôme admet une racine double).
3. $P = X^8 + X^4 + 1$.
4. $P = X^9 + X^6 + X^3 + 1$.
5. $P = X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$.

SVF 136. 1. Effectuer la division euclidienne de $X^6 - i$ par $X^2 + i$.
2. En déduire la factorisation de $X^6 - i$.

SVF 137. 1. Déterminer tous les polynômes P de degré 3 qui vérifient $P(0) = P(1) = P'(1) = 0$ et $P'(0) = 2$.
2. Déterminer tous les polynômes P de degré 3 tels que $(X + 1)^2$ divise $P + 1$ et $(X - 1)^2$ divise $P - 1$.

SVF 138. 1. Résoudre l'équation $(X^2 + 4)P'' = 6P$ d'inconnue $P \in \mathbf{R}[X]$.
2. Résoudre l'équation $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$ d'inconnue $P \in \mathbf{R}[X]$.

SVF 139. L'objectif de cet exercice est de résoudre l'équation $(X + 3)P(X) = XP(X + 1)$ d'inconnue $P \in \mathbf{R}[X]$.

1. Soit P un polynôme non nul solution du problème.
 - (a) Soit $a \in \mathbf{C}$. Montrer que si a est racine de P et si $a \neq 0$, alors $a + 1$ l'est également. Montrer que les seules racines possibles pour P sont négatives.
 - (b) Soit $a \in \mathbf{C}$. Montrer que si a est racine de P et si $a \neq -2$, alors $a - 1$ est racine de P . En déduire que les racines de P sont 0, -1 et -2 .
2. Conclure.

SVF 140. On définit la suite de polynômes (P_n) par $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$.

1. Calculer P_2 , P_3 et P_4 .
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, le degré et le coefficient dominant de P_n .
3. Montrer que pour tout $(n, z \in \mathbf{N} \times \mathbf{C}^*, P_n(z + \frac{1}{z}) = z^n + \frac{1}{z^n}$.
4. Soit $\theta \in \mathbf{R}$. Déduire de la question précédente une expression simple de $P_n(2 \cos(\theta))$, pour tout $n \in \mathbf{N}$.
5. Déterminer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, les racines de P_n et sa factorisation dans $\mathbf{C}[X]$.

Éléments de correction

Éléments de correction - SVF 135

1. En utilisant les racines 4-ièmes de l'unité, on a $P = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i)$ dans $\mathbf{R}[X]$, puis $X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2+1)$ dans $\mathbf{R}[X]$ en regroupant les racines conjuguées par exemple.
2. Avec l'indication, on cherche une racine évidente de $P' = 4X^3 - 15X^2 + 8X + 3$. On constate que 1 est racine évidente, mais 1 n'est pas racine de P . En continuant à chercher, on trouve que $P'(3) = 0$ et $P(3) = 0$, donc 3 est racine double de P . Après division euclidienne, on obtient $P = (X-3)^2(X^2+X+1)$ dans $\mathbf{R}[X]$ (le discriminant polynôme X^2+X+1 est négatif). Puis $P = (X-3)^2(X+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})(X+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$.
3. *Méthode standard.* On a $P = (X^4)^2 + (X^4) + 1 = (X^4 - e^{\frac{2i\pi}{3}})(X^4 - e^{\frac{4i\pi}{3}})$. En cherchant les racines 4-ièmes de $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $e^{\frac{4i\pi}{3}}$, on obtient sur $\mathbf{C}[X]$:

$$P = \left(X - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) \left(X - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) \left(X + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) \left(X + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) \left(X - \frac{\sqrt{3}+i}{2}\right) \left(X - \frac{\sqrt{3}-i}{2}\right) \left(X + \frac{\sqrt{3}+i}{2}\right) \left(X + \frac{\sqrt{3}-i}{2}\right).$$

En regroupant les racines conjuguées, on en déduit sur $\mathbf{R}[X]$:

$$P = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1).$$

Méthode astucieuse. On a $P = X^8 + X^4 + 1 = (X^8 + 2X^4 + 1) - X^4 = (X^4 + 1)^2 - (X^2)^2 = (X^4 + X^2 + 1)(X^4 - X^2 + 1)$. On factorise avec la même astuce : $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + 1)^2 - X^2 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$. De la même façon, on trouve $X^4 - X^2 + 1 = (X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)$. Finalement, on retrouve la factorisation de P sur $\mathbf{R}[X]$ proposée avant. En déterminant les racines de chaque trinôme, on en déduit la factorisation sur $\mathbf{C}[X]$.

4. On a $P = (X^3)^3 + (X^3)^2 + (X^3) + 1$. Posons $Y = X^3$. -1 est racine évidente de $Y^3 + Y^2 + Y + 1$, donc $Y^3 + Y^2 + Y + 1 = (Y+1)(Y^2+1)$. En déterminant les racines cubiques de -1 , i et $-i$, on obtient dans $\mathbf{C}[X]$,

$$P = (X+1)(X+i)(X-i) \left(X - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) \left(X - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) \left(X - \frac{\sqrt{3}-i}{2}\right) \left(X - \frac{\sqrt{3}+i}{2}\right) \left(X + \frac{\sqrt{3}+i}{2}\right) \left(X + \frac{\sqrt{3}-i}{2}\right).$$

On en déduit, dans $\mathbf{R}[X]$,

$$P = (X+1)(X^2+1)(X^2-X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1).$$

5. On remarque que $(X+1)P = X^7 + 1$, et on sait factoriser ce polynôme :

$$(X+1)P = (X+1)(X + e^{\frac{2i\pi}{7}})(X + e^{\frac{4i\pi}{7}})(X + e^{\frac{6i\pi}{7}})(X + e^{\frac{8i\pi}{7}})(X + e^{\frac{10i\pi}{7}})(X + e^{\frac{12i\pi}{7}})$$

puis

$$P = (X + e^{\frac{2i\pi}{7}})(X + e^{\frac{4i\pi}{7}})(X + e^{\frac{6i\pi}{7}})(X + e^{\frac{8i\pi}{7}})(X + e^{\frac{10i\pi}{7}})(X + e^{\frac{12i\pi}{7}}).$$

Dans $\mathbf{R}[X]$, on obtient

$$P = (X^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)X + 1)(X^2 - 2\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)X + 1)(X^2 - 2\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)X + 1).$$

Éléments de correction - SVF 136

1. Après division euclidienne, on trouve que $X^6 - i = (X^2 + i)(X^4 - iX^2 - 1)$.
2. Soit $z \in \mathbf{C}$.

$$z^2 + i = 0 \iff z^2 = -i \iff z = e^{-i\frac{\pi}{2}} \iff z = e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ ou } z = -e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Donc $X^2 + i = (X - e^{-i\frac{\pi}{4}})(X + e^{-i\frac{\pi}{4}}) = (X - \frac{1}{2} + \frac{i}{\sqrt{2}})(X + \frac{1}{2} - \frac{i}{\sqrt{2}})$.

Posons $Y = X^2$, de sorte que $X^4 - iX^2 - 1 = Y^2 - iY - 1$. Les racines de ce trinôme sont $\frac{i+\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{i-\sqrt{3}}{2}$. Après calculs, on obtient que les racines carrées de ces deux nombres complexes puis

$$X^6 - i = \left(X - \frac{1}{2} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \left(X + \frac{1}{2} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \left(X - \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} - i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}\right) \left(X - \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}\right) \times \\ \left(X - \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} - i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}\right) \left(X - \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}\right).$$

Éléments de correction - SVF 137

1. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré 3 tel que $P(0) = P(1) = P'(1) = 0$ et $P'(0) = 2$. Puisque 0 est racine double de P , 1 est racine simple de P et P est de degré 3, on obtient qu'il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $P = aX(X-1)^2$. De plus, $P' = a(X-1)^2 + 2aX(X-1)$ et $P'(0)$, d'où $a = 2$. Ainsi, s'il existe une solution, c'est $P = 2X(X-1)^2$.
Il ne faut pas oublier la synthèse : on vérifie que $P = 2X(X-1)^2$ est bien une solution du problème proposé.
2. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ solution du problème. On sait que -1 est racine double de $P+1$, donc -1 est racine de $(P+1)' = P'$. De même, 1 est racine double de $P-1$, donc 1 est racine de $(P-1)' = P'$. Comme $\deg(P) = 3$, on a $\deg(P') = 2$.

Éléments de correction - SVF 138

1. On commence par s'intéresser au degré en étudiant le coefficient dominant de chacun des deux membres de l'égalité. Si P a pour terme dominant $a_n X^n$, alors le membre de droite a pour terme dominant $a_n X^n$ et P'' a pour terme dominant $n(n-1)a_n X^{n-2}$, puis $(X^2+4)P''$ a pour terme dominant $n(n-1)a_n X^n$. Donc on obtient la condition nécessaire $n(n-1) = 7$, soit $n^2 - n - 6 = 0$ puis $n \in \{-2, 3\}$ d'où $n = 3$.

Posons donc $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ une solution du problème. Alors $(X^2+4)P'' = 6aX^3 + 2bX^2 + 24aX + 8b$. Par

$$\text{identification avec } 6P, \text{ on obtient que } \begin{cases} 6a = 6a \\ 2b = 6b \\ 24a = 6c \\ 8b = 6d \end{cases}, \text{ ce qui donne } (a, b, c, d) = (a, 0, 4a, 0) \text{ puis } P = aX^3 + 4aX.$$

On vérifie facilement que ces polynômes sont solutions (phase de synthèse). Finalement l'ensemble des solutions est

$$\{aX^3 + 4aX : a \in \mathbf{C}\}.$$

2. Encore une fois on s'intéresse en premier lieu au degré. On a $\deg(P(X^2)) = 2\deg(P)$ et $\deg((X^2+1)P) = 2 + \deg(P)$, d'où $\deg(P) = -\infty$ ou $\deg(P) = 2$. Donc les polynômes solutions sont nuls ou des trinômes. Supposons qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbf{C}^3$ tel que $P = aX^2 + bX + c$ solution du problème. L'égalité $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$ fournit $aX^4 + bX^2 + c = aX^4 + bX^3 + (c+a)X^2 + bX + c$ et en identifiant, on obtient $b = 0$, $c = -a$. Donc $P = aX^2 - a$. On vérifie facilement que ces polynômes sont solutions (synthèse). Finalement, l'ensemble des solutions du problème est

$$\{aX^2 - a : a \in \mathbf{C}\}.$$

Éléments de correction - SVF 139

1. (a) On a $0 = (a+3)P(a) = aP(a+1)$ donc $a+1$ est une racine de P sauf si $a = 0$.
Supposons que les racines de P sont toutes positives. En reproduisant le raisonnement précédent, on obtient $0 = (a+4)P(a+1) = (a+1)P(a+2)$, donc $a+2$ est racine de P (puisque $a+1 \neq 0$, les racines étant toutes positives). En itérant, on obtient que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $a+k+1$ est racine de P (puisque $a+k \neq 0$). Ainsi P admet une infinité de racines, donc P est nul ce qui est contradictoire. Finalement, les racines de P sont toutes négatives.
- (b) En évaluant l'égalité en $a-1$, on obtient $0 = (a-1)P(a) = (a+2)P(a-1)$, puis $a-1$ est racine puisque $a \neq -2$.
En itérant le calcul précédent, on obtient une infinité de racines sauf s'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $a+2-k=0$, i.e. $a = k-2$. Puisque les racines sont nécessairement négatives, on obtient que les seules racines possibles pour P sont 0, -1 et -2 .
2. La question 1. assure que si P est solution, il existe $\lambda \in \mathbf{C}$, $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{N}^3$ tels que $P = \lambda X^\alpha (X+1)^\beta (X+2)^\gamma$. En l'injectant dans l'équation $(X+3)P(X) = XP(X+1)$, on obtient

$$\lambda(X+3)X^\alpha(X+1)^\beta(X+2)^\gamma = \lambda X(X+1)^\alpha(X+2)^\beta(X+3)^\gamma.$$

Par unicité de la factorisation d'un polynôme en produit de facteurs irréductibles, on obtient $\alpha = 1$, $\beta = \alpha$, $\gamma = \beta$ et $\gamma = 1$. Ainsi $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 1, 1)$. Donc si une solution existe, elle s'écrit

$$P = \lambda X(X+1)(X+2).$$

Il reste à vérifier que de tels polynômes sont bien solution du problème de départ (phase de synthèse ; immédiat). Finalement, l'ensemble des polynômes solutions est

$$\{\lambda X(X+1)(X+2) : \lambda \in \mathbf{C}\}.$$

Éléments de correction - SVF 140

1. $P_2 = XP_1 - P_0 = X^2 - 2$; $P_3 = X(X^2 - 2) - X = X^3 - 3X$; $P_3 = X(X^3 - 3X) - (X^2 - 2) = X^4 - 4X^2 + 2$.
2. Posons pour tout $n \in \mathbf{N}$, H_n : « $\deg(P_n) = n$ et que le coefficient dominant de P_n est 1, i.e. il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbf{C}^n$ tels que $P_n = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ ».

H_1 et H_2 sont vraies.

Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que H_n et H_{n+1} soient vraies. Alors il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbf{C}^n$ tel que $P_n = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ et il existe $(b_0, \dots, b_n) \in \mathbf{C}^{n+1}$ tel que $P_{n+1} = X^{n+1} + \sum_{k=0}^n b_k X^k$. Ainsi,

$$P_{n+2} = X \left(X^{n+1} + \sum_{k=0}^n b_k X^k \right) - P_n = X^{n+2} + \sum_{k=0}^{n+1} c_k X^k$$

(peu importe la valeur des c_k , ce qu'on cherche ici c'est le coefficient dominant). Ainsi H_{n+2} est vraie et le principe de récurrence double permet de conclure.

3. Soit $z \in \mathbf{C}^*$. Posons pour tout $n \in \mathbf{N}$, H_n : « $P_n(z + \frac{1}{z}) = z^n + \frac{1}{z^n}$ ».
On a $P_0(z + \frac{1}{z}) = 2$ et $z^0 + \frac{1}{z^0} = 1 + 1 = 2$, donc H_0 est vraie. De plus, $P_1(z + \frac{1}{z}) = z + \frac{1}{z}$, donc H_1 est vraie.
Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que H_n et H_{n+1} soient vraies. On a

$$P_{n+2} \left(z + \frac{1}{z} \right) = \left(z + \frac{1}{z} \right) P_{n+1} \left(z + \frac{1}{z} \right) - P_n \left(z + \frac{1}{z} \right) = \left(z + \frac{1}{z} \right) \left(z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}} \right) - z^n - \frac{1}{z^n} = z^{n+2} + \frac{1}{z^{n+2}}$$

donc H_{n+2} est vraie. Le principe de récurrence double permet de conclure.

4. Soit $n \in \mathbf{N}$. En posant $z = e^{i\theta}$, on aura $z + \frac{1}{z} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos(\theta)$, donc d'après la question précédente, $P_n(2 \cos(\theta)) = e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2 \cos(n\theta)$.
5. Soit $n \in \mathbf{N}$. D'après la question précédente, si $\cos(n\theta) = 0$, alors $2 \cos(\theta)$ est une racine de P_n . Or $\cos(n\theta) = 0$ équivaut à $\theta \equiv \frac{\pi}{2n} \left[\frac{\pi}{n} \right]$. Tous les réels de la forme $2 \cos(\frac{\pi}{2n} + k \frac{\pi}{n})$ sont donc racines du polynôme P_n . Or il y a exactement n racines réelles distincts dans cette liste, à savoir $2 \cos(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n})$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ (ces valeurs sont bien distinctes car étant les cosinus d'angles distincts de l'intervalle $[0; \pi[$ sur lequel cosinus est bijectif). Le polynôme P_n étant de degré n , il ne peut avoir plus de n racines et on vient donc de les trouver toutes. Conclusion, puisque le coefficient dominant de P_n est 1, on a

$$P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - 2 \cos \left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right) \right).$$

Remarque : Pour $n = 3$, on a $P_3 = (X - 2 \cos(\frac{\pi}{6}))(X - 2 \cos(\frac{\pi}{2}))(X - 2 \cos(\frac{5\pi}{6})) = X(X - \sqrt{3})(X + \sqrt{3}) = X^3 - 3X$ et on retrouve l'expression calculée à la question 1.