

Savez-vous faire ?

Variables aléatoires

Vous devez savoir déterminer la loi d'une variable aléatoire X . Pour cela, on peut essayer de :

- déterminer l'univers image de X et calculer pour tout $k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = k)$;
- déterminer l'univers image de X et calculer pour tout $k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X \leq k)$, puis en déduire $\mathbb{P}(X = k)$ à l'aide de $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leq k+1) - \mathbb{P}(X \leq k)$ si cette formule a un sens ;
- exprimer X à l'aide d'une variable aléatoire Y sous la forme $X = f(Y)$, puis en déduire la loi de X à partir de celle de Y .

Vous devez savoir calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ d'une variable aléatoire X . On peut essayer de :

- utiliser la définition (si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{P}(X = x_i)$) ;
- utiliser la formule de transfert (si $X = g(Y)$ avec $Y(\Omega) = \{y_j : j \in J\}$, alors $\mathbb{E}(X) = \sum_{j \in J} g(y_j) \mathbb{P}(X = y_j)$;
- exprimer X sous la forme $X = aY + b$ et utiliser $\mathbb{E}(X) = a\mathbb{E}(Y) + b$.

Vous devez savoir calculer la variance $\mathbb{V}(X)$ d'une variable aléatoire X , en utilisant au l'une des formules :

- $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$;
- $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$;
- $\mathbb{V}(X) = a^2 \mathbb{V}(Y)$ si $X = aY + b$.

SVF 141. Soit $n \geq 2$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n , dans laquelle on tire deux boules sans remise. On note X (resp. Y) la variable aléatoire égale au plus petit (resp. au plus grand) des deux numéros obtenus.

1. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, calculer $\mathbb{P}(Y \leq k)$. En déduire la loi de Y .
2. Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.
3. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, calculer $\mathbb{P}(X \geq k)$. En déduire la loi de X .
4. Montrer que les variables aléatoires Y et $n+1-X$ ont même loi. En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Vous devez connaître les lois usuelles et reconnaître une « situation-type » :

Nom	Univers image	Loi	Situation type
Loi de Bernoulli $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$	$\{0, 1\}$	$\mathbb{P}(X = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$	Succès ou échec (1 ou 0) lors d'une expérience n'ayant que deux issues dont la probabilité de succès est p .
Loi binomiale $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$	$\llbracket 0, n \rrbracket$	$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	Loi du nombre de succès lors d'une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p .
Loi uniforme $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$	$\llbracket 1, n \rrbracket$	$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$	Choix d'un entier « au hasard » entre 1 et n .

SVF 142. Pour chaque question, reconnaître la loi de X et en préciser les paramètres.

1. On lance un dé équilibré à 6 faces et on note X la variable aléatoire égale au numéro obtenu.
2. Une urne contient 12 boules : 6 boules vertes, 4 boules rouges et 2 boules noires ; on tire successivement et avec remise 8 boules et on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenus ;
3. On range au hasard 10 boules dans 3 sacs de façon équiprobable et on note X le nombre de boules mises dans le premier sac.
4. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n ($n \in \mathbf{N}^*$) ; on les tire un à un sans remise, jusqu'à obtenir le jeton 1 et on note X le nombre de tirages effectués.
5. On pose n questions à un élève ; pour chaque question, r réponses sont proposées dont une et une seule est correcte ; l'élève répond au hasard à chaque question et on note X la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses.

Vous devez savoir déterminer la loi (conjointe) d'un couple de variables aléatoires (X, Y) (qu'on écrit parfois dans un tableau à double entrée) ainsi que les lois marginales d'un tel couple.

SVF 143. Une urne contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On y prélève deux boules sans remise. On définit les variables aléatoires X et Y égales respectivement au plus petit et au plus grand des deux numéros obtenus.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) .
2. En déduire les lois marginales de X et de Y . Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(Y)$.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. On pose $Z = Y - X$. Calculer $\mathbb{E}(Z)$. Déterminer ensuite la loi de Z .

Il faut penser à utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour majorer ou minorer une probabilité : si X est une variable aléatoire discrète, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

SVF 144. On effectue une suite de n lancers d'une pièce équilibrée ($n \in \mathbf{N}^*$).

Déterminer n pour que l'on puisse affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 4%, que la fréquence des piles obtenus diffère de $\frac{1}{2}$ d'au plus 3%.

Éléments de correction

Éléments de correction - SVF 141

1. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. L'événement $(Y \leq k)$ est réalisé si et seulement si on obtient deux boules de numéros inférieurs ou égaux à k , donc si et seulement si on obtient deux boules dont le numéro est compris entre 1 et k . Par équiprobabilité des tirages possibles, on a

$$\mathbb{P}(Y \leq k) = \frac{\binom{k}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}.$$

On a $Y(\Omega) = \llbracket 2, n \rrbracket$. Soit $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Alors

$$(Y = k) = (Y \leq k) \setminus (Y \leq k-1) \text{ avec } (Y \leq k-1) \subset (Y \leq k),$$

donc

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(Y \leq k) - \mathbb{P}(Y \leq k-1) = \frac{k(k-1)}{n(n-1)} - \frac{(k-1)(k-2)}{n(n-1)} = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}.$$

2. On a d'une part

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=2}^n k \mathbb{P}(Y = k) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)k = \frac{2}{n(n-1)} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k \right) \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2} \right) = \frac{2}{n(n-1)} \times \frac{(n-1)n(n+1)}{3} = \frac{2(n+1)}{3}. \end{aligned}$$

D'autre part, par la formule de transfert,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y^2) &= \sum_{k=2}^n k^2 \mathbb{P}(Y = k) = \frac{2}{n(n-1)} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k^3 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k \right) \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \left(\frac{n^2(n-1)^2}{4} + 2 \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} \right) = \frac{(n+1)(3n+2)}{6}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = \frac{(3n+2)(n+1)}{6} - \frac{4(n+1)^2}{9} = \frac{(n+1)(n-2)}{18}.$$

3. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. L'événement $(X \geq k)$ est réalisé si et seulement si on obtient deux boules de numéros supérieurs ou égaux à k , donc si et seulement si on obtient deux boules dont le numéro est compris entre k et n . Par équiprobabilité des tirages possibles, on a :

$$\mathbb{P}(X \geq k) = \frac{\binom{n-k+1}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{(n-k)(n-k+1)}{n(n-1)}.$$

L'univers image de X est $X(\Omega) = \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k+1) = \frac{(n-k)(n-k+1)}{n(n-1)} - \frac{(n-k-1)(n-k)}{n(n-1)} = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}.$$

4. On a $X(\Omega) = \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, donc $(n+1-X)(\Omega) = \llbracket 2, n \rrbracket = Y(\Omega)$. De plus, pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(n+1-X = k) = \mathbb{P}(X = n+1-k) = \frac{2(k-1)}{n(n-1)} = \mathbb{P}(Y = k).$$

On en déduit que Y et $(n+1-X)$ ont même loi. Ainsi

$$\mathbb{E}(n+1-X) = \mathbb{E}(Y) \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(n+1-X) = \mathbb{V}(Y).$$

Or $\mathbb{E}(n+1-X) = n+1 - \mathbb{E}(X)$, d'où $\mathbb{E}(X) = n+1 - \mathbb{E}(Y) = \frac{n+1}{3}$.

De même, $\mathbb{V}(n+1-X) = (-1)^2 \mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(X)$. Donc $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y) = \frac{(n+1)(n-2)}{18}$.

Éléments de correction - SVF 142

1. Le dé étant équilibré, chaque face a la probabilité $\frac{1}{6}$ d'être obtenue. Donc $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$.
2. On réalise ici une succession de 8 épreuves de Bernoulli (tirer une boule) de façons indépendantes et dont la probabilité de succès (obtenir une boule rouge) est $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. Donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(8, \frac{1}{3})$.
3. On réalise une succession de 10 épreuves de Bernoulli (mettre une boule dans l'un des trois sacs) de façons indépendantes et dont la probabilité de succès (mettre la boule dans le premier sac) est $\frac{1}{3}$. Donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(10, \frac{1}{3})$.
4. Les tirages sont s'effectuant sans remise, X est égale à la place du jeton numéro 1, cette place étant un entier « au hasard » entre 1 et n . Donc $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.
5. On réalise ici une succession de n épreuves de Bernoulli (répondre à une question) de façons indépendantes et dont la probabilité de succès (répondre correctement) est $\frac{1}{r}$. Donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{r})$.

Éléments de correction - SVF 143

1. On trouve

$Y \backslash X$	1	2	3
2	$\frac{1}{6}$	0	0
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2. En faisant la somme suivant les colonnes (resp. les lignes) on trouve :

x	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

x	2	3	4
$\mathbb{P}(Y = y)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

On calcule ensuite

$$\mathbb{E}(X) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{3}, \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{3} + 3^2 \times \frac{1}{6} = \frac{10}{3}$$

$$\text{d'où } \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{5}{9}.$$

$$\text{De même, } \mathbb{E}(Y) = \frac{10}{3}, \mathbb{E}(Y^2) = \frac{35}{3}, \text{ d'où } \mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 = \frac{5}{9}.$$

3. Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes puisque

$$\mathbb{P}(X = 2 \text{ et } Y = 2) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 2) \times \mathbb{P}(Y = 2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \neq 0.$$

4. Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X) = \frac{5}{3}$.

La variable aléatoire Z prend ses valeurs dans $\llbracket 1, 3 \rrbracket$, et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = 1) &= \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 3) + \mathbb{P}(X = 3, Y = 4) = 3 \times \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(Z = 2) &= \mathbb{P}(X = 1, Y = 3) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 3) = 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \\ \mathbb{P}(Z = 3) &= \mathbb{P}(X = 1, Y = 4) = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Éléments de correction - SVF 144

Notons X le nombre de piles obtenus et $F = \frac{X}{n}$. On cherche n pour que $\mathbb{P}\left(\left|F - \frac{1}{2}\right| < \frac{3}{100}\right) \geq 1 - \frac{4}{100}$.

$X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$, donc $\mathbb{E}(X) = \frac{n}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{n}{4}$, d'où $\mathbb{E}(F) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{V}(F) = \frac{1}{4n}$. Ainsi, l'inégalité de Bienaymé-

Tchebychev s'écrit $\mathbb{P}\left(\left|F - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{3}{100}\right) = \frac{10^4}{36n}$, puis $\mathbb{P}\left(\left|F - \frac{1}{2}\right| < \frac{3}{100}\right) \geq 1 - \frac{10^4}{36n}$. On trouve $n \geq \frac{10^6}{4 \cdot 36}$.