
Savez-vous faire ?

Intégration sur un segment

Il y a quatre types d'exercices classiques pour ce chapitre (bien entendu il y a beaucoup d'autres, mais un peu moins classiques) :

1. étude d'une suite d'intégrales (432, 440, 441, SVF 145) ;
2. utilisation des sommes de Riemann pour calculer la limite d'une somme (443, 444, SVF 146) ;
3. étude d'une fonction définie par une intégrale (431, 433, 434, 435, 436, 437, 439, 439, 442, SVF 147) ;
4. savoir exploiter l'égalité de Taylor avec reste intégral (446, 447, SVF148).

SVF 145. On définit, pour tout entier n , l'intégrale $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt$.

1. Calculer u_0 , u_1 et u_2 .
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est croissante.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leq \ln 2$.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est convergente.
5. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, écrire $\ln(2) - u_n$ sous la forme d'une intégrale.
6. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\ln(2) - u_n \leq \frac{1}{n+1}$.
7. Donner la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

SVF 146. En utilisant des sommes de Riemann, étudiez la limite de la suite dont le terme général est donné ci-après :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2}.$$

SVF 147. On considère la fonction $f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\operatorname{ch}(t)}{t^2} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Montrer que f est impaire.
3. Montrer que f est dérivable et donner l'expression de sa dérivée. On pourra utiliser que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\operatorname{ch}(2x) = 2 \operatorname{ch}^2(x) - 1$ pour simplifier le résultat obtenu.
4. Étudier les variations de f sur $\mathbf{R}_+^*$.
5. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$,

$$\frac{\operatorname{ch}(x)}{4x} \leq f(x) \leq \frac{\operatorname{ch}(2x)}{x}.$$

(b) Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.

6. Donner le tableau de variations de f sur $\mathbf{R}^*$ (sans chercher à calculer les valeurs des extremums locaux).

SVF 148. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x^2)$, prouver que

$$\int_0^1 \frac{(1+t)(1-t)^2}{(1+t^2)^2} dt = \frac{\ln 2}{2}.$$

Éléments de correction

Éléments de correction - SVF 145

1. On a $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{2+t} dt = \left[\ln(2+t) \right]_0^1 = \ln(3) - \ln(2)$, $u_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+2t} dt = \left[\frac{1}{2} \ln(1+2t) \right]_0^1 = \frac{\ln(3)}{2}$ et

$$u_2 = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2} dt = \int_0^1 \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{dt}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2}))^2 + 1} = \frac{4}{3} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{Arctan} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(t + \frac{1}{2} \right) \right) \right]_0^1$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{Arctan}(\sqrt{3}) - \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

2. Pour tout $t \in [0; 1]$, on a $0 \leq t^{n+1} \leq t^n$ puis $0 < 1+t+t^{n+1} \leq 1+t+t^n$, donc

$$\frac{1}{1+t+t^{n+1}} \geq \frac{1}{1+t+t^n}.$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et 1 en utilisant la croissance de l'intégrale sur un segment, on obtient $u_{n+1} \geq u_n$. Ainsi la suite u est croissante.

3. Il faut réussir à majorer intelligemment ce qui se trouve sous l'intégrale. Ici on utilise que pour tout $t \in [0; 1]$, on a $1+t+t^n \geq 1+t > 0$ (on peut penser à cette majoration car on sait qu'on doit obtenir à la fin une intégrale égale à $\ln(2)$...), d'où $\frac{1}{1+t+t^n} \leq \frac{1}{1+t}$. Par croissance de l'intégrale sur un segment, on en déduit

$$u_n \leq \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \left[\ln(1+t) \right]_0^1 = \ln(2).$$

4. La suite u est croissante et majorée, donc elle converge d'après le théorème de la limite monotone.

5. On a, en exploitant le calcul fait à la question 3.,

$$\ln(2) - u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} - \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^n} = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n} \right) dt.$$

6. On a, pour tout $t \in [0; 1]$, $\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n} = \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)}$. Or le dénominateur est plus grand que 1 et ainsi $\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n} \leq t^n$. En intégrant cette inégalité et en utilisant la croissance de l'intégrale, on obtient que

$$\ln(2) - u_n \leq \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

7. On a vu plus haut que $u_n \leq \ln(2)$, donc, avec la question précédente,

$$0 \leq u_n - \ln(2) \leq \frac{1}{n+1}$$

et le théorème d'encadrement permet de conclure que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ln(2)$.

Éléments de correction - SVF 146

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2(1 + (\frac{k}{n})^2)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

avec $f : x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$ une fonction continue. Le théorème de convergence des sommes de Riemann permet alors d'affirmer que (u_n) converge et que sa limite vaut

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}.$$

Éléments de correction - SVF 147

1. f est définie sur $I = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid t \mapsto \frac{\text{ch}(t)}{t^2} \in \mathcal{C}^0([\min(x, 2x); \max(x, 2x)]) \right\}$.
 - $t \mapsto \frac{\text{ch}(t)}{t^2}$ est définie et continue sur $\mathbf{R}^*$. Donc si $x \in I$, alors $f(x)$ est défini et f est continue en x , d'où $x \in \mathbf{R}^*$. Donc $I \subset \mathbf{R}^*$.
 - Réciproquement, soit $x \in \mathbf{R}^*$. Si $x \in \mathbf{R}_+^*$, alors $[\min(x, 2x); \max(x, 2x)] = [2x; x] \subset \mathbf{R}^*$, donc $t \mapsto \frac{\text{ch}(t)}{t^2}$ est continue sur $[\min(x, 2x); \max(x, 2x)]$, donc $x \in I$.
Supposons désormais $x \in \mathbf{R}_+^*$, alors $[\min(x, 2x); \max(x, 2x)] = [x; 2x] \subset \mathbf{R}^*$, donc la fonction $t \mapsto \frac{\text{ch}(t)}{t^2}$ est continue sur $[\min(x, 2x); \max(x, 2x)]$, donc $x \in I$.
Ainsi, $\mathbf{R}^* \subset I$.

On vient de montrer par double inclusion que $I = \mathbf{R}^*$. Finalement, f est définie sur $\mathbf{R}^*$.

2. Soit $x \in \mathbf{R}^*$.

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{\text{ch}(t)}{t^2} dt = - \int_x^{2x} \frac{\text{ch}(-u)}{(-u)^2} du = - \int_x^{2x} \frac{\text{ch}(u)}{u^2} du = -f(x)$$

avec le changement de variable $\begin{cases} u &= -t \\ du &= -dt \end{cases}$ et en utilisant la parité de ch . Donc f est impaire.

Notons qu'on peut généraliser ce résultat : l'intégrale d'une fonction paire est impaire.

3. Notons $g : t \mapsto \frac{\text{ch}(t)}{t^2}$ et G une primitive de g . Alors $f(x) = G(2x) - G(x)$. Donc f est dérivable comme somme de composées de fonctions dérivables, avec, pour tout $x \in \mathbf{R}^*$,

$$f'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2g(2x) - g(x) = \frac{\text{ch}(2x) - 2\text{ch}(x)}{2x^2} = \frac{2\text{ch}^2(x) - 2\text{ch}(x) - 1}{2x^2}.$$

4. Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$. Le signe de $f'(x)$ est celui de $2\text{ch}^2(x) - 2\text{ch}(x) - 1$. Or le polynôme $2X^2 - 2X - 1 = 0$ admet pour racines $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$. Cette dernière racine étant strictement inférieure à 1, on obtient que

$$2\text{ch}^2(x) - 2\text{ch}(x) - 1 \geq 0 \iff \text{ch}(x) \geq \frac{1+\sqrt{3}}{2} \iff e^x + e^{-x} \geq 1 + \sqrt{3} \iff e^{2x} - (1 + \sqrt{3})e^x + 1 = 0.$$

Le polynôme $X^2 - (1 + \sqrt{3})X + 1$ admet $\frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}$. Ainsi,

$$f'(x) \geq 0 \iff e^x \leq \frac{1 + \sqrt{3} - \sqrt{2\sqrt{3}}}{2} \text{ ou } e^x \geq \frac{1 + \sqrt{3} + \sqrt{2\sqrt{3}}}{2} \iff x \geq \ln \left(\frac{1 + \sqrt{3} + \sqrt{2\sqrt{3}}}{2} \right),$$

car $\ln \left(\frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{2\sqrt{3}}}{2} \right) < 0$ (en effet, comme $2\sqrt{3} > 3$, on a $\frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{2\sqrt{3}}}{2} < 1$). Notons $x_0 = \ln \left(\frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{2\sqrt{3}}}{2} \right)$. On a obtenu que f est décroissante sur $]0; x_0]$ et croissante sur $[x_0; +\infty[$.

5. (a) Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$. Soit $t \in [x; 2x]$. On a $\text{ch}(x) \leq \text{ch}(t) \leq \text{ch}(2x)$ (car ch est croissante sur $\mathbf{R}_+^*$) et $\frac{1}{4x^2} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{x^2}$ (car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$). Donc $\frac{\text{ch}(x)}{4x^2} \leq g(t) \leq \frac{\text{ch}(2x)}{x^2}$ puis, par intégration sur le segment $[x; 2x]$,

$$\frac{\text{ch}(x)}{4x} \leq f(x) \leq \frac{\text{ch}(2x)}{x}.$$

- (b) Par croissances comparées, $\frac{\text{ch}(x)}{4x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, donc le théorème de minoration et l'inégalité de la question précédente donnent $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. De plus, on a $\frac{\text{ch}(x)}{4x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ donc le théorème de minoration fournit encore $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$.

6. Les résultats des questions 4. et 5. et l'imparité de f (question 2.) donnent immédiatement :

x	$-\infty$	$-x_0$	0	x_0	$+\infty$
f	$-\infty$	$-f(x_0)$	$+\infty$	$f(x_0)$	$+\infty$

Éléments de correction - SVF 148

On a $f \in \mathcal{C}^3([0; 1])$ avec $f' : x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ et $f'' : x \mapsto \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$. La formule de Taylor avec reste intégral appliquée à f entre 0 et 1 à l'ordre 2 fournit :

$$f(1) = f(0) + f'(0) \times 1 + \int_0^1 \frac{2(1-t)^2}{(1+t^2)^2} (1-t) dt.$$

Puisque $f(1) = \ln(2)$, $f(0) = f'(0) = 0$ et en factorisant $(1-t^2) = (1-t)(1+t)$ pour tout $t \in [0; 1]$, on trouve le résultat souhaité.