

---

# Raisonnements et rédaction

---

**Exercice 1.** Soit  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ . Ecrire plus simplement les expressions suivantes :

- |                                  |                                       |                                                 |
|----------------------------------|---------------------------------------|-------------------------------------------------|
| (a) $(e^x)^3 e^{-2x}$ ;          | (d) $\frac{e^{3x}}{(e^{-x})^2 e^x}$ ; | (g) $\frac{\ln(100)}{\ln(10)}$ ;                |
| (b) $\frac{e^{x-1}}{e^{x+2}}$ ;  | (e) $\frac{e^x e^y}{e^{x-y}}$ ;       | (h) $\ln(8) - \ln(12) + \ln(15)$ ;              |
| (c) $\frac{e^x + e^{-x}}{e^x}$ ; | (f) $\ln(10) - \ln(2)$ ;              | (i) $\ln(10000) + \ln(0,01)$ ;                  |
|                                  |                                       | (j) $\ln(3 - 2\sqrt{2}) + \ln(3 + 2\sqrt{2})$ . |

**Exercice 2.** Trouver à partir de quel entier  $n$  on a :

- |                                                 |                                                   |
|-------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| (a) $2^n \geq 100$ ;                            | (c) $-3(1 + 2^{-n}) \geq -3,001$ ;                |
| (b) $\left(\frac{3}{5}\right)^n \leq 10^{-2}$ ; | (d) $40 \left(\frac{3}{2}\right)^{-2n} \leq 10$ . |

**Exercice 3.** Déterminer les trois limites suivantes :

- (a)  $\ell_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2}$  ;  
(b)  $\ell_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 3 + 9 + \dots + 3^n}{3^n}$  ;  
(c)  $\ell_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \dots + 2^{-n}$ .

**Exercice 4.** Résoudre les équations suivantes d'inconnue  $x \in \mathbf{R}$  :

- |                                                             |                                  |                                          |
|-------------------------------------------------------------|----------------------------------|------------------------------------------|
| (a) $(E_1) : \frac{4x+7}{5} - \frac{x-5}{3} = 2$ ;          | (d) $(E_4) : x^2 = 1$ ;          | (g) $(E_7) : \sin(x) = 1$ ;              |
| (b) $(E_2) : 1 - \frac{3}{2x} = \frac{5}{x}$ ;              | (e) $(E_5) : x^2 - 6x + 9 = 0$ ; | (h) $(E_8) : \cos(x) = 1$ ;              |
| (c) $(E_3) : \frac{9}{x} = \frac{8}{x+1} + \frac{1}{x-1}$ ; | (f) $(E_6) : x^3 - 4x^2 = x$ ;   | (i) $(E_9) : \cos(x)^2 + 2\cos(x) = 0$ . |

**Exercice 5.** Calculer les dérivées des fonctions suivantes définies par :

- |                                          |                                                 |
|------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| (a) $f_1(x) = x\sqrt{x}$ ;               | (e) $f_5(x) = \cos(2x)\sqrt{3+2x^2}$ ;          |
| (b) $f_2(x) = e^{2x} \cos(x)$ ;          | (f) $f_6(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ ; |
| (c) $f_3(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ ; | (g) $f_7(x) = e^{-x} \cos(x) \ln(2x)$ ;         |
| (d) $f_4(x) = \ln(x^2 + 1)$ ;            | (h) $f_8(x) = \ln(1 + \sqrt{x^2 + 3})$ .        |

**Exercice 6.** Soit  $f$  une fonction réelle définie sur  $\mathbf{R}$ . On dit que  $f$  est une fonction majorée lorsqu'il existe  $M \in \mathbf{R}$  tel que pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,  $f(x) \leq M$ .

- Comment traduire graphiquement le fait que  $f$  soit une fonction majorée ?
- Écrire au moyen de quantificateurs l'assertion «  $f$  est une fonction majorée », puis l'assertion «  $f$  n'est pas une fonction majorée ».
- On ne suppose pas nécessairement  $f$  majorée. Quelle est la valeur de vérité de l'assertion « pour tout  $x \in \mathbf{R}$ , il existe  $M \in \mathbf{R}$  tel que  $f(x) \leq M$  » ?

**Exercice 7.** 1. Compléter les définitions suivantes :

- (a) Soit  $x$  un nombre réel positif. On appelle racine carrée de  $x$  et on note  $\sqrt{x}$ ...

- (b) Soit  $x$  un nombre réel. On appelle valeur absolue de  $x$  et on note  $|x|$ ...
2. Montrer que pour tout  $a \in \mathbf{R}$ ,  $\sqrt{a^2} = |a|$ .

**Exercice 8.** Soit  $f$  une fonction réelle définie sur  $\mathbf{R}$ . Écrire au moyen de quantificateurs les assertions suivantes :

1.  $f$  est une fonction croissante ;
2.  $f$  n'est pas une fonction croissante ;
3.  $f$  s'annule au plus une fois.

**Exercice 9.** Montrer en revenant à la définition que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbf{R}_+$  par  $f(x) = x^2$  est croissante.

**Exercice 10.** On dit qu'une partie  $A$  de  $\mathbf{R}$  est un intervalle lorsque pour tout  $(x, y) \in A^2$  tel que  $x \leq y$ , pour tout  $z \in \mathbf{R}$ , si  $z \in [x, y]$  alors  $z \in A$ .

Les parties de  $\mathbf{R}$  suivantes sont-elles des intervalles ? Justifier votre réponse.

- (a)  $[0, 1]$  (b)  $\mathbf{R}_+^*$  (c)  $\mathbf{R}^*$

**Exercice 11.** On rappelle l'énoncé suivant :

« Soit  $f$  une fonction réelle définie sur un intervalle  $I$ . On suppose que  $f$  est dérivable sur  $I$  et que  $f'(x) \geq 0$  pour tout  $x \in I$ . Alors  $f$  est une fonction croissante. »

Identifier clairement les hypothèses et la conclusion de cette proposition, puis montrer à l'aide de contre-exemples que chacune de ces hypothèses est essentielle.

**Exercice 12.** Montrer qu'il existe un unique nombre réel  $x$  tel que, pour tout nombre réel  $\varepsilon$  strictement positif,  $|x| < \varepsilon$ .

**Exercice 13.** Montrer que les assertions suivantes sont vraies :

- (a) Si une somme de  $n$  termes positifs ou nuls est nulle, alors chacun de ses termes est nul.
- (b) Si le produit de  $n$  facteurs réels ou complexes est non nul, alors chacun de ses facteurs est non nul.
- (c) Si une somme de six nombres réels vaut 60, alors au moins un de ces six nombres est supérieur ou égal à 10 et il existe trois de ces six nombres dont la somme est supérieure ou égale à 30.
- (d) Une fonction  $f$  définie sur  $\mathbf{R}$  est strictement croissante si et seulement si pour tous nombres réels  $x$  et  $y$  tels que  $f(x) \leq f(y)$ , on a  $x \leq y$ .

**Exercice 14.** Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier la réponse donnée.

- (a)  $\forall n \in \mathbf{N}, \exists m \in \mathbf{N}, m > n$ .
- (b)  $\forall x \in \mathbf{Q}, \forall z \in \mathbf{Q}, \exists y \in \mathbf{Q}, x < y < z$ .
- (c)  $\forall n \in \mathbf{N}, (n > 3) \implies (n > 6)$ .
- (d)  $\forall x \in \mathbf{R}, (x < 2) \implies (x^2 < 4)$ .
- (e)  $\forall x \in \mathbf{R}, ((x < -2) \wedge (x > 2)) \implies x^2 < 4$ .
- (f)  $\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n, \sum_{k=1}^n a_k^2 = 0 \implies (\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_k = 0)$ .
- (g)  $\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{C}^n, \sum_{k=1}^n a_k^2 = 0 \implies (\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_k = 0)$ .

**Exercice 15.** On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  définie par  $u_0 = 1$  et par la relation de récurrence : pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{n+1} = 2u_n + 2$ .

1. Calculer  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .
2. La suite  $u$  est-elle arithmétique ? géométrique ?
3. Démontrer que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n = 3 \times 2^n - 2$ .

**Exercice 16.** Montrer que pour tout entier naturel  $n$  distinct de 3,  $2^n \geq n^2$ .

**Exercice 17 (Inégalité de Bernoulli).** 1. Démontrer l'inégalité de Bernoulli :

$$\forall x \in [-1, +\infty[, \forall n \in \mathbf{N}, (1+x)^n \geq 1+nx.$$

2. Quand peut-on préciser cette inégalité par une inégalité stricte ?

**Exercice 18.** Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 3. Écrire sans le symbole somme (avec des points de suspension) les sommes suivantes, puis les calculer :

$$\begin{aligned}
 & \bullet A = \sum_{i=0}^n \frac{1}{3^i}; & \bullet D = \sum_{k=0}^n (2^k + (-2)^k); & \bullet G = \sum_{k=0}^n n^k; \\
 & \bullet B = \sum_{k=1}^n \cos(k\pi); & \bullet E = \sum_{k=3}^n 3^k; & \bullet H = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right); \\
 & \bullet C = \sum_{p=1}^{2n} \left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{2p+2}\right); & \bullet F = \sum_{k=0}^n 2^{2k}; & \bullet I = \sum_{k=0}^{2n} \min(k, n).
 \end{aligned}$$

**Exercice 19.** Soit  $u$  une suite de nombres complexes et  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. Compléter les égalités suivantes :

$$\sum_{k=2}^n u_{k-2} = \sum_{k=?}^? u_k \quad \sum_{i=2}^n u_i = \sum_{i=0}^? u_i \quad \sum_{k=1}^{2n} u_k = \sum_{k=?}^? u_{2k} + \sum_{k=?}^? u_{2k+1} \quad \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=?}^? u_{n+1-k}$$

**Exercice 20.** Montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

**Exercice 21.** 1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que :

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Compléter le tableau suivant :

| $n$                | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------------------|---|---|---|---|
| $\sum_{k=0}^n k$   |   |   |   |   |
| $\sum_{k=0}^n k^3$ |   |   |   |   |

En déduire une conjecture pour une expression simple de  $\sum_{k=0}^n k^3$  pour tout entier naturel  $n$  et la démontrer par récurrence.

**Exercice 22.** Calculer les sommes suivantes :

$$A = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i 3 \quad B = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n 2^{2i-j} \quad C = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \max(i, j).$$

**Exercice 23.** On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 3$ ,  $u_1 = 2$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par la relation de récurrence  $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$ .

- Calculer  $u_2$ ,  $u_3$  et  $u_4$ .
- Montrer que l'équation  $r^2 = 4r - 4$  d'inconnue réelle  $r$  admet une unique solution, que l'on notera  $r_0$ .
- On cherche à montrer l'existence de deux nombres réels  $a$  et  $b$  tels que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_n = ar_0^n + nbr_0^n.$$

Montrer que si de tels nombres existent, alors on a nécessairement  $a = 3$  et  $b = -2$ .

- Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_n = 3r_0^n - 2nr_0^n.$$

**Exercice 24.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  la suite de réels définie par la donnée de ses trois premiers termes  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 0$  et  $u_2 = 2$ , et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n.$$

Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = n(n-1)$ .

**Exercice 25.** On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  définie par  $u_0 = 3$ ,  $u_1 = 2$  et, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , par la relation de récurrence  $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$ .

1. Énoncer la formule du binôme de Newton.
2. Quel est le coefficient du terme en  $x^3y^5$  dans le développement de l'expression  $(2x - y)^8$  ?
3. Calculer les sommes suivantes, où  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$A = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \quad B = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \quad C = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} 2^k \quad D = \sum_{k=2}^{n+1} \binom{n}{k-2} n 3^{n+2k} \quad E = \sum_{k=3}^{n+1} \binom{n}{k-2}.$$

**Exercice 26.** Soit  $n$  un entier naturel non nul. Soient  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  des nombres réels positifs tels que, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $a_i \leq b_i$ . Prouver que :

$$\sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \dots + \sqrt{a_n}}} \leq \sqrt{b_1 + \sqrt{b_2 + \dots + \sqrt{b_n}}}.$$

**Exercice 27.** On rappelle que la fonction cosinus est dérivable sur  $\mathbf{R}$  et que sa dérivée est la fonction  $-\sin$ .

1. Justifier que la dérivée de la fonction cosinus est la fonction  $\cos' : x \mapsto \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ .
2. Montrer que la dérivée de la fonction  $\cos'$ , notée  $\cos''$  ou  $\cos^{(2)}$ , est la fonction

$$\cos'' : x \mapsto \cos(x + \pi).$$

3. Déterminer une expression de la dérivée de  $\cos''$ . Cette fonction est appelée dérivée troisième de la fonction cosinus et est notée  $\cos^{(3)}$ .
4. Plus généralement, montrer que pour tout entier naturel  $n$ , la dérivée  $n$ -ième de la fonction cosinus est la fonction :

$$\cos^{(n)} : x \mapsto \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

et donner une formule analogue pour la dérivée  $n$ -ième de la fonction sinus.

**Exercice 28 (Inégalité triangulaire généralisée).** 1. Soit  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ . Montrer que  $(x + y)^2 \leq (|x| + |y|)^2$ . En déduire l'inégalité triangulaire :  $|x + y| \leq |x| + |y|$ .

2. Généraliser ce résultat : montrer que pour tout entier naturel  $n$ , pour tous nombres réels  $a_0, \dots, a_n$ ,

$$\left| \sum_{i=0}^n a_i \right| \leq \sum_{i=0}^n |a_i|.$$

**Exercice 29.** Déterminer les fonctions  $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$  telles que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

**Exercice 30.** Déterminer les fonctions  $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$  telles que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, \quad f(x + y) = x + f(y).$$