
Généralités sur les fonctions

Exercice 31. Montrer que deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leur racine carrée.

Exercice 32. Résoudre les équations et inéquations suivantes, d'inconnue x réelle.

- | | | |
|----------------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| (a) $ 2x + 3 = 7 - x $; | (e) $ x^2 + 2x - 3 \leq 0$; | (i) $\sqrt{7x + 2} \geq 2$ |
| (b) $ x + 2 = -1$; | (f) $\sqrt{x^2 + 1} = 2$; | (j) $\sqrt{9 - x} > 0$; |
| (c) $ 3 + 2x \geq 2$; | (g) $\sqrt{3 - x} = 5$; | (k) $\sqrt{x^2 + 2x} \leq 3$; |
| (d) $ 2 - x > 0$; | (h) $\sqrt{x - 8} = -2$; | (l) $\sqrt{10 - 3x} \leq 0$. |

Exercice 33. 1. Résoudre l'inéquation $\frac{1}{3x + 1} \geq 2x - 1$ d'inconnue réelle x .
2. Résoudre l'inéquation $x\sqrt{x + 1} \leq x^2$ d'inconnue réelle x .

Exercice 34. 1. Prouver que pour tout nombres réels x et y non simultanément nuls,

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2}.$$

2. Soit $(x, y) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$. Dédurre de la question précédente que

$$\frac{x}{x^4 + y^2} \leq \frac{1}{2xy},$$

puis que,

$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^4} \leq \frac{1}{xy}.$$

Exercice 35. Posons :

$$A = \left\{ \frac{x - y}{x + y + 3} : (x, y) \in [-1, 1]^2 \right\}, B = \left\{ \frac{x^2}{y^2 - x^2} : x \in [-2, 3], y \in [-7, -5] \right\}, C = \left\{ \frac{x - y^2 + 3}{x^2 + y^2 - y} : (x, y) \in [1, 2]^2 \right\}.$$

Montrer que A , B et C sont des parties bornées de $\mathbf{R}$.

Exercice 36. Posons

$$A = \left\{ \frac{x^2}{x^2 + y^2} : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \right\} \quad \text{et} \quad B = \left\{ \frac{x}{x^2 + y^2} : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \right\}.$$

Ces parties de $\mathbf{R}$ sont-elles bornées ?

Exercice 37. Soit $R \in]0, 1[$, soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$,

$$\left| \sum_{k=0}^n x^k \right| \leq \frac{2}{1 - R}.$$

Exercice 38. 1. Montrer que pour tout nombre réel x strictement positif,

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

2. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, pour tous nombres réels strictement positifs $a_1, \dots, a_n$,

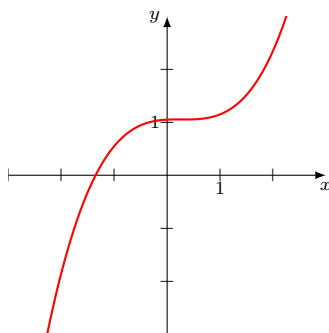
$$\sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \geq n^2.$$

Exercice 39. Montrer que $f : x \mapsto \frac{3x - x^2 + 2x^3}{x^5 + 4x - 6}$ définie sur $[-1, 1]$ est une fonction bornée.

Exercice 40. Rappeler l'allure du graphe de la fonction racine carrée, définie sur $\mathbf{R}_+$. Donner rapidement le graphe des fonctions

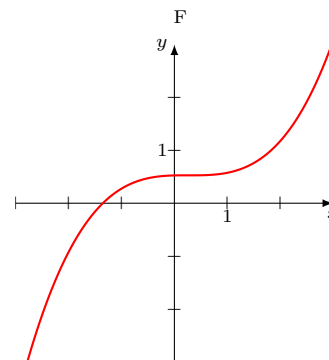
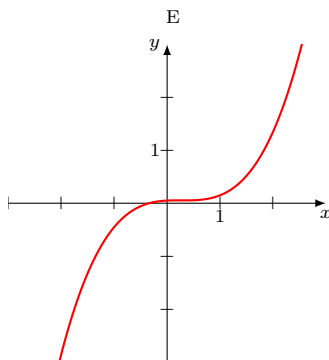
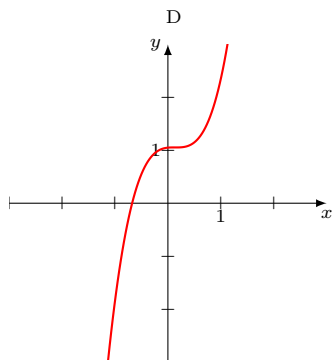
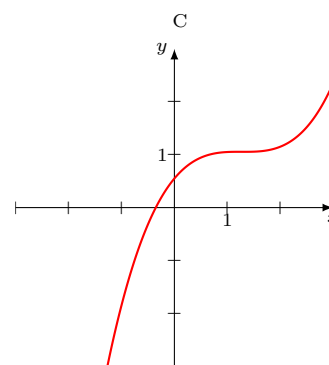
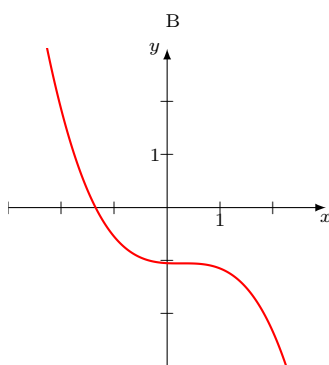
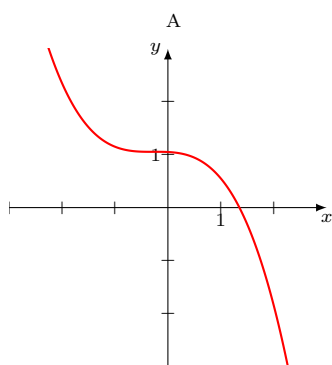
$$f_1 : x \mapsto \sqrt{-x} \quad f_2 : x \mapsto \sqrt{x} + 1 \quad f_3 : x \mapsto \sqrt{x+1} \quad f_4 : x \mapsto \sqrt{1-x} \quad f_5 : x \mapsto \sqrt{\frac{x}{2}}$$

Exercice 41. Voici la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-2; 2]$.



Choisir parmi les fonctions suivantes celles qui sont représentées par une des courbes données ci-après.

$$\begin{array}{llllll} f_1 : x \mapsto f(-x) & f_2 : x \mapsto -f(x) & f_3 : x \mapsto f(x+1) & f_4 : x \mapsto f(x) + 1 & f_5 : x \mapsto f(x-1) \\ f_6 : x \mapsto f(x) - 1 & f_7 : x \mapsto f(2x) & f_8 : x \mapsto 2f(x) & f_9 : x \mapsto f\left(\frac{x}{2}\right) & f_{10} : x \mapsto \frac{f(x)}{2} \end{array}$$



Exercice 42. Pour tout entier relatif k , on note f_k la fonction :

$$\begin{aligned} f_k : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto (x+1)e^{-kx} \end{aligned}$$

et on note Γ_k sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Montrer qu'il existe deux points communs à toutes les courbes Γ_k .

Exercice 43. Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x \longmapsto \frac{2\cos(x) - 3\sin(3x)}{3 - \cos(x) + \sin(x)}$ puis montrer que cette fonction est périodique et bornée.

Exercice 44. Montrer que si f et g sont deux fonctions numériques bornées sur leur domaine de définition D , alors les fonctions $f + g$ et fg sont des fonctions bornées sur D . Si g ne s'annule pas, la fonction f/g est-elle encore bornée sur D ?

Exercice 45. 1. Montrer que les fonction $x \longmapsto \cos(2x)$, $x \longmapsto \sin(x/3)$ et $x \longmapsto \cos(\sqrt{2}x)$ sont périodiques.
2. Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbf{R}$ et périodique. Soit $\lambda \in \mathbf{R}^*$. Montrer que la fonction $g : x \longmapsto f(\lambda x)$ est périodique et déterminer une de ses périodes.

Exercice 46. 1. Montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel.
2. Prouver que la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \cos(x) + \cos(\sqrt{3}x)$ (où $x \in \mathbf{R}$) est bornée et atteint son maximum en 0.
3. Cette fonction est-elle périodique ?
4. Énoncer une condition suffisante pour laquelle la somme, respectivement le produit, respectivement le quotient, de deux fonctions périodiques est périodique.

Exercice 47. Montrer que toute fonction monotone et périodique est constante.

Exercice 48. Déterminer le domaine de définition, la parité et la périodicité de chacune des fonctions suivantes, puis en déduire leur domaine d'étude :

$$\begin{array}{lll} f_1 : x \longmapsto \cos(3x) & f_2 : x \longmapsto \frac{x^2}{x^4 - 4} & f_3 : x \longmapsto \frac{x}{\ln(|x|)} \\ f_4 : x \longmapsto \sin(x) + \sin(2x + 3) & f_5 : x \longmapsto \frac{\cos(2x)}{\sin^2(3x)} & f_6 : x \longmapsto \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{3x - 4}}. \end{array}$$

Exercice 49. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, déterminer une expression simple de la dérivée n -ième de la fonction logarithme.

Exercice 50. 1. Montrer que toute fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
2. Expliciter cette décomposition pour la fonction exponentielle : on appelle **cosinus hyperbolique** et on note ch la partie paire de cette décomposition ; on appelle **sinus hyperbolique** et on note sh sa partie impaire.
3. Étudier les deux fonctions ainsi obtenues (tableau de variations, limites et tracé rapide du graphe).
4. Vérifier que pour tout nombre réel x ,

$$\text{ch}(x)^2 - \text{sh}(x)^2 = 1.$$

Exercice 51. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\exp(x) \geq 1 + x$ puis plus généralement, prouver que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\exp(x) \geq \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$