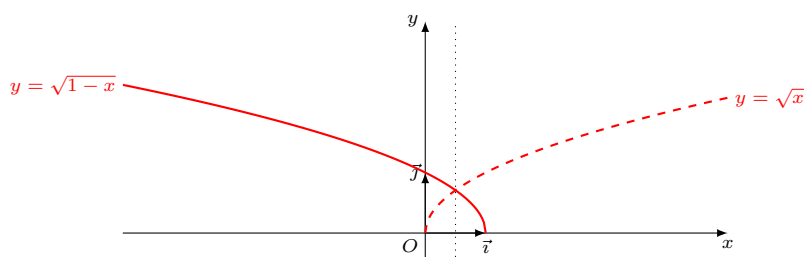
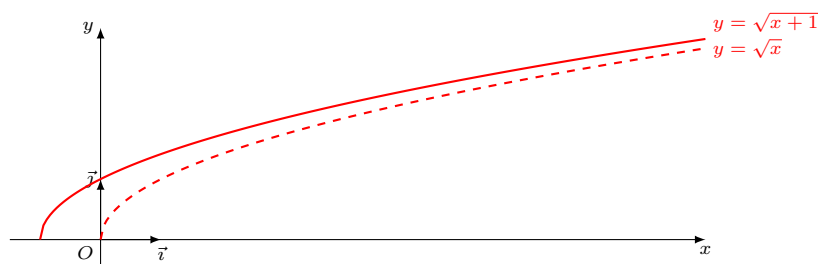
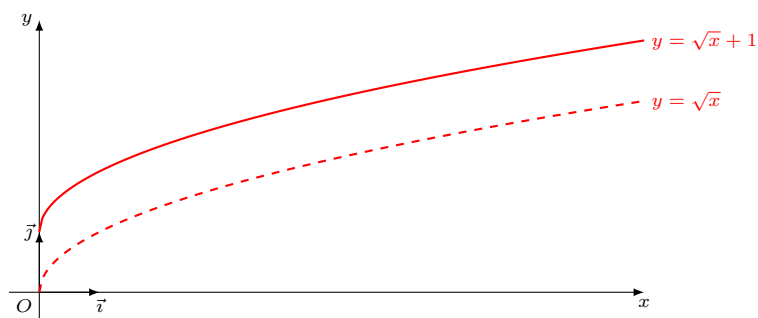
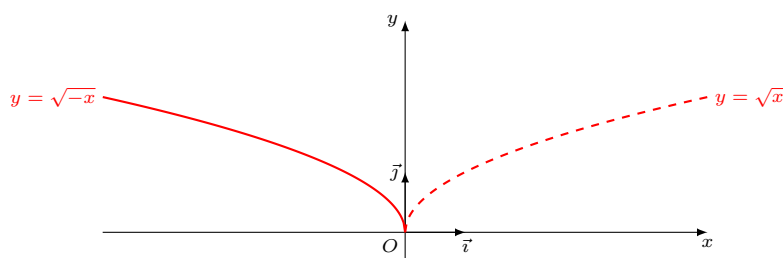


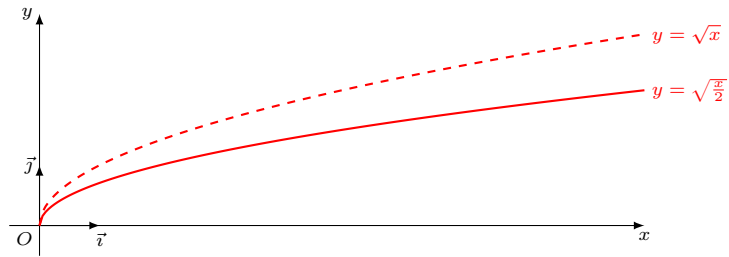
Généralités sur les fonctions - Quelques corrigés

Exercice 40. Rappeler l'allure du graphe de la fonction racine carrée, définie sur $\mathbf{R}_+$. Donner rapidement le graphe des fonctions

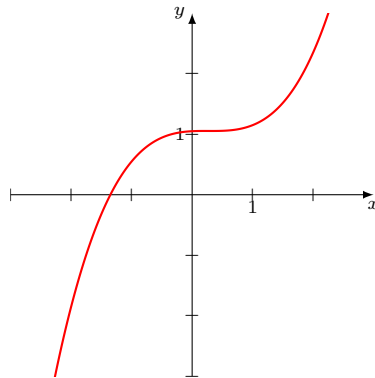
$$f_1 : x \mapsto \sqrt{-x} \quad f_2 : x \mapsto \sqrt{x} + 1 \quad f_3 : x \mapsto \sqrt{x+1} \quad f_4 : x \mapsto \sqrt{1-x} \quad f_5 : x \mapsto \sqrt{\frac{x}{2}}$$

Corrigé 40. On a :



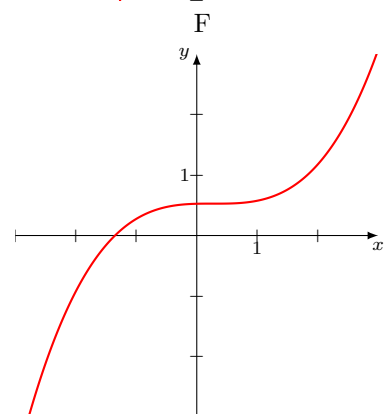
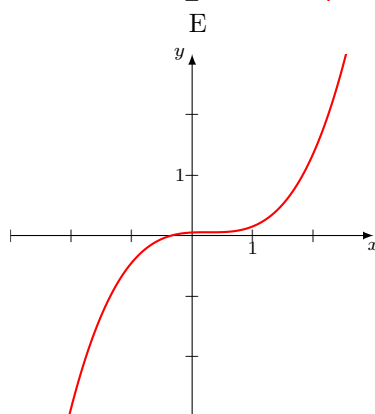
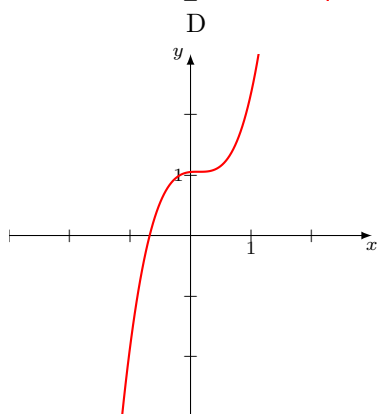
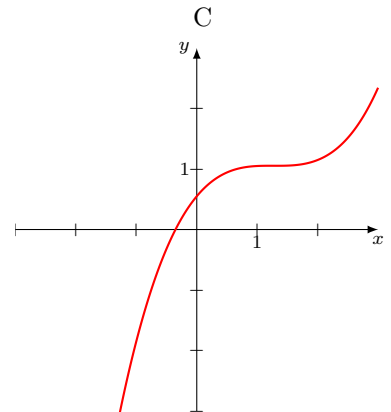
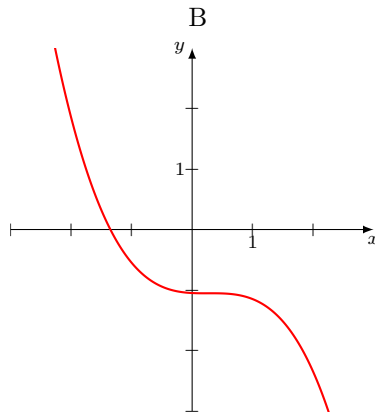
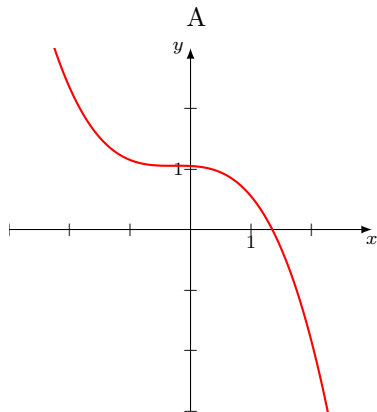


Exercice 41. Voici la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-2; 2]$.



Choisir parmi les fonctions suivantes celles qui sont représentées par une des courbes données ci-après.

$$\begin{array}{lllll} f_1 : x \mapsto f(-x) & f_2 : x \mapsto -f(x) & f_3 : x \mapsto f(x+1) & f_4 : x \mapsto f(x)+1 & f_5 : x \mapsto f(x-1) \\ f_6 : x \mapsto f(x)-1 & f_7 : x \mapsto f(2x) & f_8 : x \mapsto 2f(x) & f_9 : x \mapsto f\left(\frac{x}{2}\right) & f_{10} : x \mapsto \frac{f(x)}{2} \end{array}$$



Corrigé 41. On a les correspondances suivantes :

A	B	C	D	E	F
f_1	f_2	f_5	f_7	f_6	f_{10}

Exercice 43. Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \frac{2 \cos(x) - 3 \sin(3x)}{3 - \cos(x) + \sin(x)}$ puis montrer que cette fonction est périodique et bornée.

Corrigé 43. Soit $x \in \mathbf{R}$. Puisque $\cos$ et $\sin$ sont 2π -périodique, on a :

$$f(x + 2\pi) = \frac{2 \cos(x + 2\pi) - 3 \sin(3x + 6\pi)}{3 - \cos(x + 2\pi) + \sin(x + 2\pi)} = f(x),$$

donc f est 2π -périodique.

Soit $x \in \mathbf{R}$. D'après l'inégalité triangulaire, on a : $|2 \cos(x) - 3 \sin(3x)| \leq |2 \cos(x)| + |3 \sin(3x)| \leq 5$. Par ailleurs, $|3 - \cos(x) + \sin(x)| \geq 3 - \cos(x) + \sin(x) \geq 3 - 1 - 1$. Ainsi, f est bornée par 5.

Exercice 46. 1. Montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

2. Prouver que la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \cos(x) + \cos(\sqrt{3}x)$ (où $x \in \mathbf{R}$) est bornée et atteint son maximum en 0.
3. Cette fonction est-elle périodique ?
4. Énoncer une condition suffisante pour laquelle la somme, respectivement le produit, respectivement le quotient, de deux fonctions périodiques est périodique.

Corrigé 46. 1. Commençons par montrer que, pour tout $a \in \mathbf{R}$, si a^2 est divisible par 3. Montrons la contraposée de cette assertion. Soit a un nombre réel tel que a n'est pas divisible par 3. En faisant la division euclidienne de a par 3, on observe qu'il existe $r \in \{1, 2\}$ et $q \in \mathbf{Z}$ tel que $a = 3q + r$. Ainsi $a^2 = 3(3q^2 + 2qr) + r^2$, avec $r^2 \in \{1, 4\}$. En particulier a^2 n'est pas divisible par 3 (on a même que le reste de a^2 par 3 vaut toujours 1).

Finalement, pour tout $a \in \mathbf{R}$, si a^2 est divisible par 3, alors a est divisible par 3.

Supposons par l'absurde que $\sqrt{3}$ est rationnel. Soient $(a, b) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$ tel que $\sqrt{3} = a/b$ et a/b est irréductible (*i.e.* a et b sont premiers entre eux). On a $a = \sqrt{3}b$, puis $a^2 = 3b^2$, donc a^2 est divisible par 3. Avec ce que nous avons montré avant, on en déduit que a est également divisible par 3. Il existe alors $p \in \mathbf{Z}$ tel que $a = 3p$, puis, avec l'inégalité $a^2 = 3b^2$, $b^2 = 3p$. Ainsi b^2 est divisible par 3, donc b est divisible par 3. Nous avons donc démontré que a et b étaient divisibles par 3, ce qui est contradictoire. Finalement, $\sqrt{3}$ est irrationnel.

2. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a d'après l'inégalité triangulaire $|f(x)| \leq |\cos(x)| + |\cos(\sqrt{3}x)| \leq 2$, donc f est bornée par 2. Par ailleurs, $f(0) = 2$, donc f atteint son maximum en 0.
3. Supposons f périodique. Alors il existe $T \in \mathbf{R}^*$ tel que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x + T) = f(x)$. En particulier, $f(0 + T) = 2$, ce qui entraîne

$$\begin{cases} \cos(T) = 1 \\ \cos(\sqrt{3}T) = 1 \end{cases}, \text{ donc } \begin{cases} T \equiv 0[2\pi] \\ T \equiv 0[2\pi/\sqrt{3}] \end{cases}, \text{ donc il existe } (k, k') \in \mathbf{Z}^2 \begin{cases} T = 2k\pi \\ T = 2\pi/\sqrt{3}k' \end{cases}$$

Puisque $T \neq 0$, on a k et k' non nuls. Ainsi $2k\pi = 2\pi k'/\sqrt{3}$ devient $\sqrt{3} = k'/k$, ce qui contredit $\sqrt{3} \notin \mathbf{Q}$. Ainsi f n'est pas périodique.

4. • Soit $(T_1, T_2) \in (\mathbf{R}^*)^2$, $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Supposons que f est T_1 -périodique, g est T_2 -périodique et que $T_1/T_2 \in \mathbf{Q}$. Montrons $f + g$ est périodique (la condition est également nécessaire, mais c'est plus dur à démontrer...).
Il existe $(a, b) \in (\mathbf{Z}^*)^2$ tel que $T_1/a = T_2/b$, puis $bT_1 = aT_2$. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$(f + g)(x + bT_1) = f(x + bT_1) + g(x + bT_1) = f(x) + g(x + aT_2) = f(x) + g(x)$$

donc $f + g$ est bT_1 -périodique.

Application : Déterminer une période de $x \mapsto \cos(3x) + \sin(5x)$ est périodique (réponse : 10π).

- Le raisonnement précédent se retranscrit immédiatement dans le cas d'un produit ou d'un quotient de fonctions périodiques.

Exercice 47. Montrer que toute fonction monotone et périodique est constante.

Corrigé 47. Soit E une partie non vide de $\mathbf{R}$ et $f \in \mathcal{F}(E, \mathbf{R})$, périodique et monotone. Soit $x \in E$.

On suppose que f est croissante. Puisque f est périodique, il existe $T > 0$ une période de f . Soit $x_0 \in E$.

On suppose que $x \geq x_0$. Il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $x_0 + mT \geq x$ (on peut choisir m comme n'importe quel entier supérieur à $\frac{x-x_0}{T} \geq 0$). Ainsi $x_0 \leq x \leq x_0 + mT$. Comme f est croissante, on déduit de cette inégalité $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_0 + mT)$.

Or f est T -périodique, d'où $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_0)$. Ainsi $f(x) = f(x_0)$. Donc, pour tout $x \geq x_0$, $f(x) = f(x_0)$.

Si $x \leq x_0$, alors il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $x_0 - mT \leq x$, puis $x_0 - mT \leq x \leq x_0$, puis $f(x_0 - mT) \leq f(x) \leq f(x_0)$ et ainsi $f(x) = f(x_0)$. Donc, pour tout $x \leq x_0$, $f(x) = f(x_0)$.

Finalement, pour tout $x \in E$, $f(x) = f(x_0)$, ce qui signifie que f est constante.

Si f est décroissante, alors $-f$ est croissante. On déduit de ce qui est fait avant que $-f$ est constante, donc f est constante également.

Exercice 48. Déterminer le domaine de définition, la parité et la périodicité de chacune des fonctions suivantes, puis en déduire leur domaine d'étude :

$$f_1 : x \mapsto \cos(3x)$$

$$f_2 : x \mapsto \frac{x^2}{x^4 - 4}$$

$$f_3 : x \mapsto \frac{x}{\ln(|x|)}$$

$$f_4 : x \mapsto \sin(x) + \sin(2x + 3)$$

$$f_5 : x \mapsto \frac{\cos(2x)}{\sin^2(3x)}$$

$$f_6 : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{3x - 4}}$$

Corrigé 48. 1. f_1 est définie sur $\mathbf{R}$ en tant que composée de $\mathbf{R} \xrightarrow{x \mapsto 3x} \mathbf{R} \xrightarrow{x \mapsto \cos(x)} \mathbf{R}$.

Puisque $\cos$ est paire, on a, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f_1(-x) = f_1(x)$, donc f est paire.

Puisque $\cos$ est 2π -périodique, on a, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f_1(x + 2\pi/3) = \cos(3x + 2\pi) = \cos(3x) = f_1(x)$, donc f_1 est $2\pi/3$ -périodique.

Finalement on peut se contenter d'étudier f sur $[0, \pi/3]$.

2. Soit $x \in \mathbf{R}$. $x^4 - 4 = 0 \iff (x^2 - 2)(x^2 + 2) = 0 \iff (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$, donc f_2 est définie sur $E = \mathbf{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

Pour tout $x \in E$, $f_2(-x) = f_2(x)$, donc f_2 est paire.

Supposons que f_2 soit périodique, de période $T \in \mathbf{R}^*$. Alors $\sqrt{2} + T \in E$, et pourtant f_2 n'est pas définie en $\sqrt{2}$. Ainsi f_2 n'est pas périodique.

Finalement on peut se contenter d'étudier f sur $[0, \sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$.

3. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|x| > 0 \iff x \neq 0$. De plus, pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, $\ln(|x|) = 0 \iff |x| = 1$. Ainsi f_3 est définie sur $E = \mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

Soit $x \in E$. $f_3(-x) = -f_3(x)$, donc f_3 est impaire.

Supposons que f_3 soit périodique, de période $T \in \mathbf{R}^*$. Alors $1 + T \in E$ et pourtant f_3 n'est pas définie en 1. Donc f_3 n'est pas périodique.

Finalement, on peut se contenter d'étudier f_3 sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

4. f_4 est définie sur $\mathbf{R}$, en tant que somme de composées fonctions définies sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$.

Soit $x \in \mathbf{R}$. $f_4(\pi/2) = 1 - \sin(3)$ et $f_4(-\pi/2) = -1 - \sin(3)$. En particulier, $f_4(\pi/2) - f_4(-\pi/2) = 2$ et $f_4(\pi/2) + f_4(-\pi/2) = -2\sin(3)$. Ces valeurs étant non nulles, f_4 n'est ni paire, ni impaire.

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f_4(x + 2\pi) = f_4(x)$, donc f_4 est 2π -périodique.

Finalement, on peut se contenter d'étudier f_4 sur $[0, 2\pi[$.

5. Soit $x \in \mathbf{R}$. $\sin^2(3x) = 0 \iff 3x \equiv 0[\pi] \iff x \equiv 0[\pi/3]$, donc f_5 est définie sur $E = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left] \frac{k\pi}{3}, \frac{(k+1)\pi}{3} \right[$.

Soit $x \in E$. $f_5(-x) = f_5(x)$, donc f_5 est paire.

Soit $x \in E$. $f_5(x + \pi) = \cos(2x + 2\pi) / \sin^2(3x + 3\pi) = \cos(2x) / \sin^2(3x + \pi) = \cos(2x) / (-\sin(3x))^2 = f_5(x)$, donc f_5 est π -périodique.

Finalement, on peut se contenter d'étudier f_5 sur $[0, \pi/2] \cap E =]0, \pi/3[\cup]\pi/3, \pi/2]$.

6. Soit $x \in \mathbf{R}$. $x^2 + 1 \geq 0$, $3x - 4 > 0 \iff x > 4/3$, donc f_6 est définie sur $E =]4/3, +\infty[$.
Puisque E n'est pas symétrique par rapport à 0, f_6 n'est ni paire, ni impaire, ni périodique.
Finalement, le domaine d'étude de f est E .

Exercice 49. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, déterminer une expression simple de la dérivée n -ième de la fonction logarithme.

Corrigé 49. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, posons « $\ln^{(n)} : x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$ ».

- On a, pour tout $x \in \mathbf{R}^{+*}$, $(-1)^0 \times 0!/x^1 = 1/x = \ln'(x)$, donc H_1 est vraie.
- Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que H_n soit vraie. Soit $x \in \mathbf{R}^{+*}$.

$$\ln^{(n+1)}(x) = \left(\ln^{(n)}\right)'(x) = (-1)^{n-1}(n-1)! \times (-nx^{-n-1}) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}},$$

donc H_{n+1} est vraie.

- Le principe de récurrence permet de conclure.

- Exercice 50.**
1. Montrer que toute fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
 2. Expliciter cette décomposition pour la fonction exponentielle : on appelle **cosinus hyperbolique** et on note ch la partie paire de cette décomposition ; on appelle **sinus hyperbolique** et on note sh sa partie impaire.
 3. Etudier les deux fonctions ainsi obtenues (tableau de variations, limites et tracé rapide du graphe).
 4. Vérifier que pour tout nombre réel x ,

$$\operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}(x)^2 = 1.$$

Corrigé 50. 1. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Supposons qu'il existe f_p une fonction paire et f_i une fonction impaire vérifiant $f_p + f_i = f$. On a pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = f_p(x) + f_i(x)$ et $f(-x) = f_p(x) - f_i(x)$. On en déduit que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $f_i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$.

Synthèse. On pose $f_p : x \mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $f_i : x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2}$. On a $f_p + f_i = f$, f_p paire et f_i impaire.

Conclusion. Toute fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

2. On a $\operatorname{ch} : x \mapsto (e^x + e^{-x})/2$ et $\operatorname{sh} : x \mapsto (e^x - e^{-x})/2$.
3. (a) ch est dérivable en tant que somme de composées de fonctions dérivables définies sur $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\operatorname{ch}'(x) = (e^x - e^{-x})/2 = \operatorname{sh}(x)$. Ainsi,

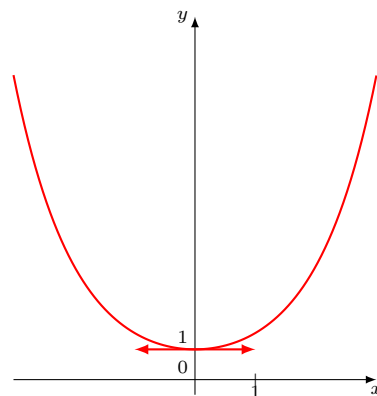
$$\operatorname{ch}'(x) \geq 0 \iff e^{-x}(e^{2x} - 1) \geq 0 \iff x \geq 0,$$

et,

$$\operatorname{ch}'(x) = 0 \iff e^{-x}(e^{2x} - 1) = 0 \iff x = 0.$$

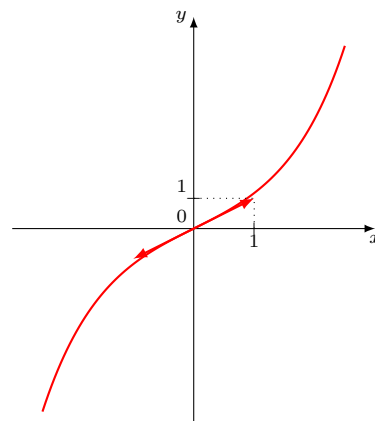
De plus, $\operatorname{ch}(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$, donc, par parité de ch, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$. On en déduit que :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\operatorname{ch}'(x)$		- 0 +	
ch	$+\infty$	1	$+\infty$



- (b) sh est dérivable en tant que somme de composées de fonctions dérivables définies sur $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\text{sh}'(x) = (e^x + e^{-x})/2 = \text{ch}(x)$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\text{sh}'(x) > 0$. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sh}(x) = +\infty$, donc, par imparité de sh, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{ch}(x) = -\infty$. On en déduit que :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{sh}'(x)$	+		
sh	$-\infty$	0	$+\infty$



4. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}) = 1.$$

Exercice 51. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\exp(x) \geq 1 + x$ puis plus généralement, prouver que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\exp(x) \geq \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

Corrigé 51. Posons $f : x \mapsto e^x - 1 - x$. Alors f est dérivable en tant que somme de fonctions dérivables, et $f' : x \mapsto e^x - 1$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) \geq 0 \iff x \geq 0$. Donc f est décroissante sur $\mathbf{R}^-$ et croissante sur $\mathbf{R}^+$, ce qui entraîne que $f \geq f(0)$, d'où, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $e^x \geq x + 1$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $H_n : \ll \text{pour tout } x \in \mathbf{R}_+, e^x \geq \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \gg$.

- Puisque pour tout $x \geq 0$, $e^x \geq 1$, alors H_0 est vraie.
- Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que H_n soit vraie. Posons $f : x \mapsto e^x - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!}$. f est dérivable en tant que somme de fonctions dérivables, et, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$,

$$f'(x) = e^x - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{kx^{k-1}}{k!} = e^x - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

Avec H_n , on en déduit que $f' \geq 0$, donc f est croissante. Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $f(x) \geq 0$, ce qui signifie que H_{n+1} est vraie.

- Le principe de récurrence permet de conclure.