
Fonctions usuelles

Exercice 52. On introduit la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right).$$

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Montrer que f est dérivable sur son domaine de définition, puis montrer que f' est du signe de $h : x \mapsto x - 1 + e^{-x}$ sur $\mathbf{R}^*$.
3. Etudier la fonction h ainsi définie et déterminer son signe.
4. Dresser le tableau des variations de f , déterminer ses limites, puis tracer rapidement son graphe.

Exercice 53. Etudier les fonctions suivantes (domaine de définition, sens de variation, limites, asymptotes éventuelles et allure de la courbe représentative) :

$$f_1 : x \mapsto x^x \quad f_2 : x \mapsto \sqrt{\frac{\ln|x|}{x}} \quad f_3 : x \mapsto \frac{\tan(2x)}{\tan(x)}.$$

Exercice 54. Résoudre les équations ou inéquations suivantes, d'inconnue réelle x :

- | | |
|--|--|
| (1) $\ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \frac{1}{2}(\ln x + \ln 3)$ | (2) $2 \ln x + \ln(2x - 1) = \ln(2x + 8) + 2 \ln(x - 1)$ |
| (3) $\exp(x) - 5 + 6 \exp(-x) > 0$ | (4) $\exp(3x) - 3 \exp(2x) + 3 \exp(x) = 1$ |
| (5) $(x^2)^x = x^{(x^2)}$ | (6) $5 \operatorname{ch}(x) - 4 \operatorname{sh}(x) = 3$ |
| (7) $8^{x+\frac{4}{3}} - 5^{3x} = 2 \times 8^{x+\frac{1}{3}} + 5^{3x-1}$ | (8) $\frac{1}{2} \ln(x - 1) + \ln(x + 1) = 2 \ln \sqrt{1 + x}$ |
| (9) $\operatorname{ch}(x) = -2$ | (10) $\operatorname{ch}(x) = 3$. |

Exercice 55. Résoudre les systèmes suivantes, d'inconnue $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$(S_1) : \begin{cases} \operatorname{ch}x + \operatorname{ch}y &= 7 \\ \operatorname{sh}x + \operatorname{sh}y &= 5 \end{cases}, \quad (S_2) : \begin{cases} \operatorname{ch}x + \operatorname{sh}y &= 2 \\ \operatorname{sh}x + \operatorname{sh}y &= 3 \end{cases}.$$

Exercice 56. 1. Quelle est la limite de l'expression $5^x/2^x$ en $+\infty$?

2. On introduit les fonction $f : x \mapsto 2^{(5^x)}$ et $g : x \mapsto 5^{(2^x)}$. Étudier la limite de la fonction f/g en $+\infty$.

Exercice 57. 1. Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1.$$

2. Calculer la limite de la suite u de terme général $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, où $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 58. Soit x un nombre réel non nul, et n un entier naturel. Le but de l'exercice est le calcul (ou plutôt la simplification) des sommes :

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(kx) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^n \operatorname{sh}(kx).$$

1. Rappeler la formule donnant la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison q distincte de 1.
2. En déduire la valeur de :

$$E_n = \sum_{k=0}^n e^{kx}.$$

3. Conclure.
4. Pouvez-vous en déduire une expression de :

$$\sum_{k=0}^n k \operatorname{ch}(kx) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n k \operatorname{sh}(kx) \quad ?$$

Exercice 59. En appliquant le théorème de bijection, déterminer le nombre de solutions de l'équation $e^x - 1 = 3x$, d'inconnue réelle x .

Exercice 60. Prouver que, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$.

Exercice 61. Considérons la fonction $f : x \mapsto x \ln x$ définie sur $\mathbf{R}_+^*$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[e^{-1}; +\infty[$ dans un ensemble à préciser. On note g sa fonction réciproque.
2. Déterminer le domaine de dérivabilité de la fonction g . On note I ce domaine.
3. Justifier que g est deux fois dérivable sur I .
4. Calculer $g(e)$, $g'(e)$ et $g''(e)$.

Exercice 62. Calculer les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} & \operatorname{Arctan}(-1), \quad \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{2}\right), \quad \operatorname{Arcsin}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)\right) \\ & \operatorname{Arcsin}\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\right), \quad \sin\left(\operatorname{Arcsin}\left(-\frac{1}{2}\right)\right), \quad \operatorname{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \cos\left(\operatorname{Arcsin}\left(\frac{3}{5}\right)\right). \end{aligned}$$

Exercice 63. Simplifier, pour les réels x pour lesquels elles ont un sens, les expressions suivantes :

$$\operatorname{Arccos}(\cos x), \quad \cos(\operatorname{Arccos} x), \quad \sin(\operatorname{Arccos} x), \quad \tan(\operatorname{Arcsin} x), \quad \tan(2\operatorname{Arcsin} x), \quad \sin(2\operatorname{Arctan} x).$$

Exercice 64. Résoudre les équations ou inéquations suivantes, d'inconnue réelle x :

- | | |
|---|--|
| (1) $\sqrt{2} \sin(3x) \geq 1$ | (2) $\cos(2x) = \cos(x)$ |
| (3) $\cos(x) = \sqrt{3} \sin(x)$ | (4) $3 \tan(x) = 2 \cos(x)$ |
| (5) $\sin(x) - \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ | (6) $\sin(x) + \sin(3x) = 0$ |
| (7) $\cos(4x) = \sin(5x)$ | (8) $2 \sin^2(x) + 3 \sin(x) + 1 < 0$ |
| (9) $\sqrt{3} \cos(2x) + \sin(2x) = -1$ | (10) $2 \sin(x) + \sin(2x) = 0$ |
| (11) $3 \cos(5x) = \sin(2x) + \sin(12x)$ | (12) $3 \cos(x) - 4 \sin(x) = 2$ |
| (13) $\operatorname{Arcsin}(2x) = \operatorname{Arccos}(x)$ | (14) $\operatorname{Arcsin}(x+1) - \operatorname{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{6}$ |

Exercice 65. Calculer la valeur exacte des réels :

$$\operatorname{Arctan} 2 + \operatorname{Arctan} 3, \quad \operatorname{Arctan} 2 + \operatorname{Arctan} 5 + \operatorname{Arctan} 8, \quad 4\operatorname{Arctan} \frac{1}{5} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{239}.$$

Exercice 66. On pose :

$$A = \operatorname{Arccos}\left(-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right).$$

1. Montrer que le nombre A est bien défini puis montrer que $A \in]\frac{\pi}{2}; \pi[$.
2. Montrer que $\sin(A) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, puis calculer la valeur de $\cos(2A)$.
3. Démontrer l'égalité $\cos(4A) = \sin(A)$.
4. En déduire la valeur de A .

Exercice 67. Déterminer la limite en 0 des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \frac{\sin x}{x}, \quad f_2 : x \mapsto \frac{\sin(3x)}{2x}, \quad f_3 : x \mapsto \frac{\operatorname{Arctan} x}{\sin x}, \quad f_4 : x \mapsto (3 + \cos x)^{\frac{1}{x^2}}, \quad f_5 : x \mapsto \frac{\sin x}{\operatorname{sh} x}.$$

Exercice 68. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)) = \operatorname{Arccos}(1/\operatorname{ch}(x))$.

Exercice 69. Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité, puis calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f_1 : x &\mapsto \operatorname{Arcsin}(1 - x^2) & f_2 : x &\mapsto \operatorname{Arctan}(x\sqrt{1-x}) \\ f_3 : x &\mapsto \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{1+x}\right) & f_4 : x &\mapsto \frac{\ln(1+\operatorname{ch}(2x))}{x} \\ f_5 : x &\mapsto 3^{4x^2-1} & f_6 : x &\mapsto \sqrt{\frac{1}{\sin x}}. \end{aligned}$$

Exercice 70. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(1/x) = \pi/2$. Ecrire une relation analogue sur $\mathbf{R}_-^*$.

Exercice 71. On considère la fonction f , définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(\sqrt{1+x^2} - x).$$

1. Donner le domaine de dérivabilité de f ainsi que f' . On simplifiera au maximum l'expression de f' .
2. En déduire une expression simplifiée de f .
3. Tracer la courbe représentative de f .

Exercice 72. Le but de l'exercice est l'étude de la fonction f définie par :

$$f(x) = \left(\sqrt{1 - \sin(2x)} + \sqrt{1 + \sin(2x)} \right)^{\frac{1}{\ln(|2 \cos(x)|)}}.$$

1. On introduit la fonction g définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $g : x \mapsto x \ln(x)$. Établir le tableau des variations de g et déterminer les limites de g aux bornes de son intervalle de définition.
2. Pour quelles valeurs du nombre réel x l'expression définissant $f(x)$ a-t-elle un sens ? On notera D l'ensemble de ces valeurs.
3. Vérifier que f est π -périodique. Cette fonction est-elle paire ? impaire ?
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\sqrt{1 - \sin(2x)} = |\cos(x) - \sin(x)| \quad \text{et} \quad \sqrt{1 + \sin(2x)} = |\cos(x) + \sin(x)|.$$

En déduire que f est constante sur $[0; \frac{\pi}{4}] \cap D$ et que, pour tout $x \in [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}] \cap D$,

$$f(x) = \exp(h(4 \cos^2(x))),$$

où h représente la fonction définie pour tout $x \in]0; 1[\cup]1; 4[$ par :

$$h(x) = \frac{\ln(4-x)}{\ln(x)}.$$

5. Montrer que f est dérivable sur $] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[\cap D$ et exprimer sur cet intervalle la fonction f' à l'aide de la fonction h' .
6. Calculer $h'(x)$ pour tout $x \in]0; 1[\cup]1; 4[$.
7. En utilisant la question 1., déterminer le signe de h' sur $]0; 1[$ et sur $]1; 2[$.
8. A l'aide des résultats précédents, établir le tableau des variations de f (avec les limites) sur $] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[\cap D$.
9. Tracer le plus précisément possible le graphe de f sur $[-\pi; \pi] \cap D$.