

Fonctions usuelles - Quelques corrigés

Exercice 53. On introduit la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \ln \left(\frac{e^x - 1}{x} \right).$$

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Montrer que f est dérivable sur son domaine de définition, puis montrer que f' est du signe de $h : x \mapsto x - 1 + e^{-x}$ sur $\mathbf{R}^*$.
3. Étudier la fonction h ainsi définie et déterminer son signe.
4. Dresser le tableau des variations de f , déterminer ses limites, puis tracer rapidement son graphe.

Corrigé 53. 1. Soit $x \in \mathbf{R}^*$. $e^x - 1 > 0 \iff x > 0$, donc $(e^x - 1)/x > 0 \iff x \neq 0$. Ainsi f est définie sur $\mathbf{R}^*$.

2. La fonction $x \mapsto e^x - 1$ étant dérivable sur $\mathbf{R}$, on en déduit que $g : \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}^{+*}$ est dérivable. Ainsi, $x \mapsto (e^x - 1)/x$ comme $\ln : \mathbf{R}^{+*} \rightarrow \mathbf{R}$ est dérivable sur $\mathbf{R}^{+*}$, on obtient que $f = \ln \circ g$ est dérivable sur $\mathbf{R}^*$. Or, pour tout $x \in \mathbf{R}^*$ $g'(x) = e^x(x - 1 + e^{-x})/x^2 = e^x h(x)/x^2$, puis $f' : x \mapsto e^x h(x)/(x^2 g(x))$. Or, pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, $g(x) > 0$, $e^x > 0$ et $x^2 > 0$, donc le signe de f' est celui de h .

3. h est dérivable et, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $h'(x) = 1 - e^{-x}$. Soit $x \in \mathbf{R}^*$. $h'(x) \geq 0 \iff x \geq 0$, donc h est décroissante sur $\mathbf{R}^-$ et croissante sur $\mathbf{R}^+$. On en déduit que h atteint son minimum en 0, puis que pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, $h(x) \geq 0$.

4. D'après les deux questions précédentes, f est croissante sur $\mathbf{R}^-$ et sur $\mathbf{R}^+$. De plus,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x/x = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

et

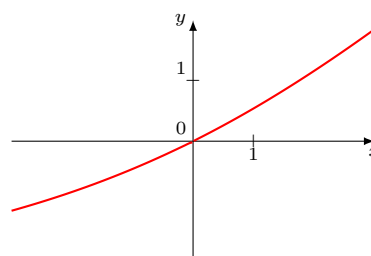
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x/x = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Par ailleurs, puisque $\exp$ est dérivable en 0,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{e^x - 1}{x} = \exp'(0) = 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 0.$$

En résumé,

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
f	$-\infty$	0	$+\infty$



Exercice 54. Étudier les fonctions suivantes (domaine de définition, sens de variation, limites, asymptotes éventuelles et allure de la courbe représentative) :

$$f_1 : x \mapsto x^x \quad f_2 : x \mapsto \sqrt{\frac{\ln|x|}{x}} \quad f_3 : x \mapsto \frac{\tan(2x)}{\tan(x)}.$$

Corrigé 54. 1. Puisque $\ln$ est définie sur $\mathbf{R}^{+*}$, $g : x \mapsto x \ln(x)$ est définie sur $\mathbf{R}^{+*}$ et il en est de même de $x \mapsto x^x$ (car $\exp$ est définie sur $\mathbf{R}$).

Les fonctions $g : \mathbf{R}^{+*} \rightarrow \mathbf{R}$ et $\exp : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ sont dérivables, donc $f_1 = \exp \circ g$ est dérivable sur $\mathbf{R}^{+*}$. Or $g' : x \mapsto \ln(x) + 1$, donc $f_1' : x \mapsto (\ln(x) + 1)e^{x \ln(x)}$.

Soit $x \in \mathbf{R}^{+*}$.

$$f_1'(x) = 0 \iff \ln(x) + 1 = 0 \iff x = e^{-1}.$$

et

$$f_1'(x) \geq 0 \iff \ln(x) + 1 \geq 0 \iff x \geq e^{-1}$$

donc f_1 est strictement décroissante sur $] -\infty, e^{-1}]$ et strictement croissante sur $[e^{-1}, +\infty[$.

Par ailleurs,

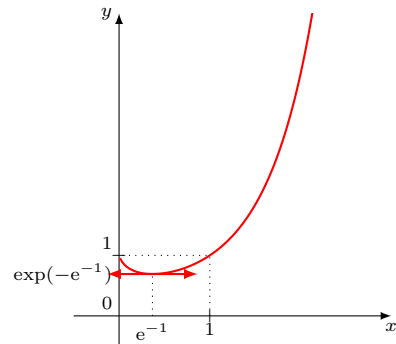
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x) = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^x = +\infty,$$

et,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x) = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f_1(x) = 1.$$

En résumé, puisque $f(e^{-1}) = \exp(e^{-1} \ln(e^{-1})) = \exp(-e^{-1})$ et $f_1(1) = 1$,

x	0	e^{-1}	1	$+\infty$
$f_1'(x)$		-	0	+
f_1	1	$\searrow$	$\exp(-e^{-1})$	$\nearrow$ $+\infty$



2. Puisque $|x| > 0 \iff x \neq 0$, $g : x \mapsto \ln|x|/x$ est définie sur $\mathbf{R}^*$. Soit $x \in \mathbf{R}^*$.

$$\ln|x|/x \geq 0 \iff \begin{cases} \ln|x| \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \ln|x| \leq 0 \\ x < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} |x| \geq 1 \\ x > 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} |x| \leq 1 \\ x < 0 \end{cases}$$

Posons $D = [-1, 0[\cup]1, +\infty[$. On a montré que f_2 est la composée de $g : D \rightarrow \mathbf{R}^+$ par $\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$,
 $x \mapsto \ln|x|/x$ $x \mapsto \sqrt{x}$,

donc f_2 est définie sur D .

g est dérivable en tant que quotient de fonctions dérivables et $g' : x \mapsto (1 - \ln|x|)/x^2$. Puisque la fonction racine carrée n'est dérivable que sur $\mathbf{R}^{+*}$ et que, pour tout $x \in D$,

$$g(x) = 0 \iff \ln|x| = 0 \iff |x| = 1 \iff x \in \{-1, 1\},$$

on obtient, avec le théorème de dérivation d'une fonction composée, que f_2 est dérivable sur $D \setminus \{-1, 1\}$, et

$$f_2' : x \mapsto \frac{1 - \ln|x|}{x^2} \frac{1}{\sqrt{2 \ln|x|/x}}.$$

Soit $x \in D$.

$$f_2'(x) = 0 \iff 1 - \ln|x| = 0 \iff |x| = e \iff x \in \{-e, e\},$$

et

$$f_2'(x) \geq 0 \iff 1 - \ln|x| \geq 0 \iff |x| \leq e \iff x \in [-e, e].$$

Ainsi f est strictement croissante sur $[-e, e] \cap D = [-1, 0[\cup]1, e]$ et décroissante sur $[e, +\infty[$. Par ailleurs, on a, pour tout $x > 0$, $\ln|x|/x = -(\ln(-x)/(-x))$, donc

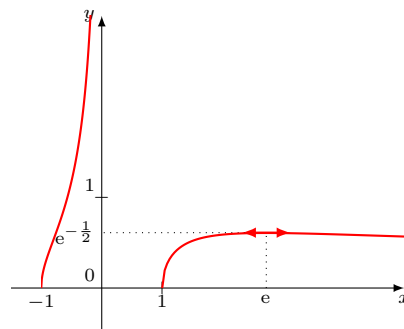
$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\ln(|x|)}{x} = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f_2(x) = +\infty$$

De plus,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln|x|}{x} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = 0.$$

En résumé, puisque $f(-1) = 0$, $f(1) = 0$ et $f(e) = e^{-1/2}$,

x	-1	0	1	e	$+\infty$
$f'_2(x)$	+		+	0	-
f_2	0 $\nearrow$ $+\infty$		0 $\nearrow$ $e^{-1/2}$		0



3. Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \{\pi/4 + k\pi/2, k \in \mathbf{Z}\}$.

$$\tan(x) = 0 \iff x \equiv 0[\pi]$$

Donc f_3 est définie sur $\mathbf{R} \setminus \{k\pi, \pi/4 + k\pi/2, k \in \mathbf{Z}\}$. Puisque f est π -périodique et paire, on peut se contenter d'une étude sur $D =]0, \pi/4[\cup]\pi/4, \pi/2[$.

On remarque que, pour tout $x \in D$,

$$f_3(x) = \frac{2 \tan(x)}{\tan(x)(1 - \tan^2(x))} = \frac{2}{1 - \tan^2(x)}.$$

$g : x \mapsto \tan^2(x)$ est dérivable en tant que composée des fonctions dérivables $D \rightarrow \mathbf{R}$ et $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$,
 $x \mapsto \tan(x)$ $x \mapsto x^2$,

et $g' : x \mapsto 2(1 + \tan^2(x)) \tan(x)$. Ainsi, f est dérivable sur D et

$$f'_3 : x \mapsto \frac{4 \tan(x)(1 + \tan^2(x))}{(1 - \tan^2(x))^2}.$$

On en déduit que, pour tout $x \in D$,

$$f'_3(x) \geq 0 \iff \tan(x) \geq 0 \iff x \in]\pi/4, \pi/2[,$$

ce qui entraîne que f_3 est décroissante sur $]0, \pi/4[$ et croissante sur $]\pi/4, \pi/2[$. Par ailleurs,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 1 - \tan^2(x) = 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f_3(x) = 2$$

De plus,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \pi/4 \\ x \neq \pi/4}} 1 - \tan^2(x) = 0$$

Comme pour tout $x \in]0, \pi/2[$, $1 - \tan^2(x) > 0 \iff x \in]0, \pi/4[$, on en déduit :

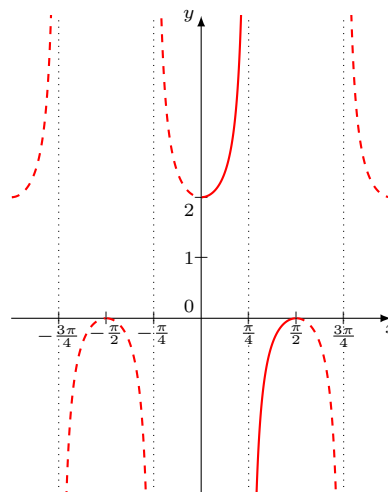
$$\lim_{\substack{x \rightarrow \pi/4 \\ x < \pi/4}} f_3(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \pi/4 \\ x > \pi/4}} f_3(x) = -\infty.$$

On a aussi :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \pi/2 \\ x < \pi/2}} 1 - \tan^2(x) = -\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \pi/2 \\ x < \pi/2}} f_3(x) = 0.$$

En résumé,

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'_3(x)$		+	+
f_3		$+\infty$ $\nearrow$ 2	0 $\nearrow$ $-\infty$



Exercice 56. Résoudre les systèmes suivantes, d'inconnue $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$(S_1) : \begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 7 \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 5 \end{cases}, \quad (S_2) : \begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} y = 2 \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 3 \end{cases}.$$

Corrigé 56. 1. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 7 \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 5 \end{cases} &\iff \begin{cases} e^x + e^{-x} + e^y + e^{-y} = 14 \\ e^x - e^{-x} + e^y - e^{-y} = 10 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} e^x + e^y = 12 \\ e^{-x} + e^{-y} = 2 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ &\iff \begin{cases} e^x + e^y = 12 \\ e^{-x} e^{-y} (e^y + e^x) = 2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} e^x + e^y = 12 \\ e^x e^y = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

D'après les relations coefficients-racines, e^x et e^y satisfont le système si et seulement si e^x et e^y sont les solutions de $X^2 - 12X + 6 = 0$. Or le discriminant de ce trinôme vaut 120, donc ses racines sont $6 - \sqrt{30}$ et $6 + \sqrt{30}$. On remarque que $30 < 36$, donc $\sqrt{30} < 6$ puis $6 - \sqrt{30} > 0$. On en déduit que l'ensemble des solutions du système est $\{(\ln(6 - \sqrt{30}), \ln(6 + \sqrt{30})), (\ln(6 + \sqrt{30}), \ln(6 - \sqrt{30}))\}$.

2. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Si (x, y) est une solution de (S_2) , alors, en soustrayant les deux premières équations, on obtient $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = -1$, ce qui se réécrit $2e^{-x} = -1$. Ainsi l'ensemble des solutions de (S_2) est $\emptyset$.

Exercice 57. 1. Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1.$$

2. Calculer la limite de la suite u de terme général $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, où $n \in \mathbf{N}$.

Corrigé 57. 1. La fonction $\ln : \mathbf{R}^{+*} \longrightarrow \mathbf{R}$ et $f :]-1, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}^{+*}$ sont dérivables, donc $\ln \circ f$ est dérivable.

En particulier,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - \ln(1)}{x+1-1} = (\ln \circ f)'(0) = 1.$$

2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On pose $N = \frac{1}{n}$. Alors

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \exp\frac{\ln(1+N)}{N}$$

Or, avec la question précédente,

$$\lim_{N \rightarrow 0} \exp \frac{\ln(1+N)}{N} = e,$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Exercice 58. Soit x un nombre réel non nul, et n un entier naturel. Le but de l'exercice est le calcul (ou plutôt la simplification) des sommes :

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(kx) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^n \operatorname{sh}(kx).$$

1. Rappeler la formule donnant la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison q distincte de 1.
2. En déduire la valeur de :

$$E_n = \sum_{k=0}^n e^{kx}.$$

3. Conclure.
4. Pouvez-vous en déduire une expression de :

$$\sum_{k=0}^n k \operatorname{ch}(kx) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n k \operatorname{sh}(kx) \quad ?$$

Corrigé 58. 1. Si $q \neq 1$, $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$

2. Puisque $x \neq 0$, $e^x \neq 0$ et ainsi $\sum_{k=0}^n e^{kx} = \frac{e^{(n+1)x} - 1}{e^x - 1}.$

3. On a d'une part :

$$\begin{aligned} C_n(x) &= \sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(kx) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (e^{kx} + e^{-kx}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{(n+1)x} - 1}{e^x - 1} + \frac{e^{-(n+1)x} - 1}{e^{-x} - 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{(n+1)x/2} \operatorname{sh} \frac{n+1}{2} x}{e^{x/2} \operatorname{sh} \frac{x}{2}} + \frac{e^{-(n+1)x/2} \operatorname{sh} - \frac{n+1}{2} x}{e^{-x/2} \operatorname{sh} - \frac{x}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sh} \frac{n+1}{2} x}{\operatorname{sh} \frac{x}{2}} (e^{nx/2} + e^{-nx/2}) && \text{car sh est impaire} \\ &= \frac{\operatorname{sh} \frac{n+1}{2} x}{\operatorname{sh} \frac{x}{2}} \operatorname{ch} \frac{nx}{2}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
 S_n(x) &= \frac{e^{(n+1)x} - 1}{2(e^x - 1)} - \frac{e^{-(n+1)x} - 1}{2(e^{-x} - 1)} \\
 &= \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}x\right) e^{(n+1)x/2}}{2\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right) e^{x/2}} - \frac{\operatorname{sh}\left(-\frac{n+1}{2}x\right) e^{-(n+1)x/2}}{2\operatorname{sh}\left(-\frac{x}{2}\right) e^{-x/2}} \\
 &= \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{2\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)} (e^{nx/2} - e^{-nx/2}) \\
 &= \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)} \operatorname{sh}\left(\frac{nx}{2}\right).
 \end{aligned}$$

4. On remarque que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $x \mapsto \operatorname{ch}(kx)$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que sa dérivée vaut $x \mapsto k\operatorname{ch}(kx)$. Il "suffit" donc de dériver les expressions obtenues pour conclure. Détaillons la première somme : $x \mapsto \operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}x\right) \operatorname{ch}\left(\frac{nx}{2}\right)$ est dérivable sur $\mathbf{R}$, et sa dérivée est :

$$x \mapsto \frac{n+1}{2} \operatorname{ch}\left(\frac{n+1}{2}x\right) \operatorname{ch}\left(\frac{nx}{2}\right) + \frac{n}{2} \operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}x\right) \operatorname{sh}\left(\frac{nx}{2}\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n k\operatorname{ch}(kx) &= \frac{1}{\operatorname{sh}^2(x/2)} \left(\frac{1}{2} \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}x\right) \operatorname{ch}\left(\frac{nx}{2}\right) + \frac{n+1}{2} \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{n+1}{2}x\right) \operatorname{ch}\left(\frac{nx}{2}\right) + \right. \\
 &\quad \left. \frac{n}{2} \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}x\right) \operatorname{sh}\left(\frac{nx}{2}\right) \right).
 \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n k\operatorname{sh}(kx) &= \frac{1}{\operatorname{sh}^2(x/2)} \left(\frac{1}{2} \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}x\right) \operatorname{sh}\left(\frac{nx}{2}\right) + \frac{n+1}{2} \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{n+1}{2}x\right) \operatorname{sh}\left(\frac{nx}{2}\right) + \right. \\
 &\quad \left. \frac{n}{2} \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{n+1}{2}x\right) \operatorname{ch}\left(\frac{nx}{2}\right) \right).
 \end{aligned}$$

Exercice 59. En appliquant le théorème de bijection, déterminer le nombre de solutions de l'équation $e^x - 1 = 3x$, d'inconnue réelle x .

Corrigé 59. Posons $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$. f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $f' : x \mapsto e^x - 3$. En particulier,

$$f'(x) \geq 0 \iff e^x \geq 3 \iff x \geq \ln(3)$$

et

$$f'(x) = 0 \iff x = \ln(3).$$

On en déduit que :

- f est strictement décroissante sur $] -\infty, \ln(3)[$ et continue. Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow \ln 3 \\ x < \ln 3}} f(x) = 2 - 3\ln(3)$.

Le théorème de bijection assure alors que f réalise une bijection de $] -\infty, \ln(3)[$ dans $[2 - 3\ln(3), +\infty[$. Puisque $2 - 3\ln(3) < 0$ (en effet, $e \leq 3$, puis $e^2 \leq 9$, puis $e^2/27 \leq 1/3 < 1$, donc, en composant par $\ln$, $2 - 3\ln(3) < 0$), on obtient que f s'annule une unique fois sur $] -\infty, \ln(3)[$.

- f est strictement croissante sur $[\ln(3), +\infty[$ et continue. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $f(\ln 3) = 2 - 3\ln(3)$. Le théorème de bijection monotone assure alors que f réalise une bijection de $[\ln(3), +\infty[$ dans $[2 - 3\ln(3), +\infty[$. Comme avant, on obtient que f s'annule une unique fois sur $] -\infty, \ln(3)[$.

Finalement, l'équation admet exactement deux solutions dans $\mathbf{R}$.

Exercice 69. Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité, puis calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \operatorname{Arcsin}(1 - x^2)$$

$$f_2 : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x\sqrt{1-x})$$

$$f_3 : x \mapsto \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

$$f_4 : x \mapsto \frac{\ln(1+\operatorname{ch}(2x))}{x}$$

$$f_5 : x \mapsto 3^{4x^2-1}$$

$$f_6 : x \mapsto \sqrt{\frac{1}{\sin x}}.$$

Corrigé 69. 1. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$-1 \leq 1 - x^2 \leq 1 \iff -2 \leq -x^2 \leq 0 \iff 0 \leq x^2 \leq 2 \iff -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}.$$

Donc f_1 est définie sur $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ en tant que composée de

$$\begin{array}{ccc} [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & 1 - x^2 \end{array} \text{ par } \operatorname{Arcsin}$$

De plus,

$$1 - x^2 = 1 \iff x = 0 \quad \text{et} \quad 1 - x^2 = -1 \iff x \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\},$$

d'où f_1 est dérivable sur $E =]-\sqrt{2}, 0[\cup]0, \sqrt{2}[$ en tant que composée des fonctions dérivables :

$$\begin{array}{ccccc} E & \longrightarrow &]-1, 1[& \text{par} &]-1, 1[\longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 1 - x^2 & & x \longmapsto \operatorname{Arcsin} x \end{array}$$

Soit $x \in E$.

$$f'_1(x) = \frac{-2x}{\sqrt{1 - (1 - x^2)^2}} = \frac{-2x}{|x|\sqrt{2 - x^2}}.$$

2. Soit $x \in \mathbf{R}$. $1 - x \geq 0 \iff x \leq 1$, donc $g :]-\infty, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$ est définie en tant que composée de

$$\begin{array}{ccccc}]-\infty, 1] & \longrightarrow & \mathbf{R}^+ & \text{par} & \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 1 - x & & x \longmapsto \sqrt{x} \end{array}.$$

De plus, $1 - x = 0 \iff x = 1$, donc g est dérivable sur $] - \infty, 1[$ en tant que composée des fonctions dérivables :

$$\begin{array}{ccccc}]-\infty, 1[& \longrightarrow & \mathbf{R}^{+\star} & \text{par} & \mathbf{R}^{+\star} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 1 - x & & x \longmapsto \sqrt{x} \end{array}.$$

Ainsi, $h : x \mapsto x\sqrt{1-x}$ est définie sur $] - \infty, 1]$ et dérivable sur $] - \infty, 1[$, de dérivée

$$h'(x) = \sqrt{1-x} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}.$$

Puisque Arctan est définie et dérivable sur $\mathbf{R}$, le théorème de dérivation d'une composée assure que $f_2 = \operatorname{Arctan} \circ h$ est définie sur $] - \infty, 1]$ et dérivable sur $] - \infty, 1[$, de dérivée :

$$f'_2(x) = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}} \times \frac{1}{1 + (x\sqrt{1-x})^2}.$$

3. Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

Si $x > -1$, puisque la fonction inverse est décroissante sur $\mathbf{R}^{+\star}$, on a :

$$-1 \leq \frac{1}{1+x} \leq 1 \iff 0 < \frac{1}{x+1} \leq 1 \iff 1+x \geq 1 \iff x \geq 0.$$

Si $x < -1$, puis la fonction inverse est décroissante sur $\mathbf{R}^{-\star}$, on a :

$$-1 \leq \frac{1}{x+1} \leq 1 \iff -1 \leq \frac{1}{x+1} < 0 \iff 1+x \leq -1 \iff x \leq -2.$$

Ainsi, f_3 est définie sur $] - \infty, 2] \cup [0, +\infty[$ en tant que composée de

$$\begin{array}{ccc}] - \infty, 2] \cup [0, +\infty[& \longrightarrow & [-1, 1] \text{ par } \text{Arccos.} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x+1} \end{array}$$

Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$,

$$\frac{1}{x+1} = 1 \iff x = 0 \text{ et } \frac{1}{x+1} = -1 \iff x = 2.$$

On en déduit que f_3 est dérivable sur $D =] - \infty, 2[\cup]0, +\infty[$ en tant que composée des fonctions dérivables :

$$\begin{array}{ccc} D & \longrightarrow &] - 1, 1[\text{ par }] - 1, 1[\longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x+1} \quad x \longmapsto \text{Arccos} \end{array}.$$

De plus, pour tout $x \in D$,

$$f'_3(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \times \frac{-1}{\sqrt{1 - (\frac{1}{x+1})^2}} = \frac{-1}{(1+x)\sqrt{(x+1)^2 - 1}}.$$

4. Comme $\text{ch} \geq 1$, on a, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $1 + \text{ch}(2x) > 0$. Ainsi, $x \mapsto \ln(1 + \text{ch}(2x))$ est définie sur $\mathbf{R}$ en tant que composée de

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}^{+\star} \\ x & \longmapsto & 1 + \text{ch}(2x) \end{array} \text{ par } \ln.$$

On en déduit que f_4 est définie sur $\mathbf{R}^{\star}$ en tant que quotient dont le dénominateur s'annule en 0. Les fonctions précédentes étant toutes dérivables, on obtient que f_4 est dérivable sur $\mathbf{R}^{\star}$.

La dérivée de $x \mapsto 1 + \text{ch}(2x)$ vaut $x \mapsto 2\text{sh}(2x)$, donc la dérivée de $x \mapsto \ln(1 + \text{ch}(2x))$ est $x \mapsto \frac{2\text{sh}(2x)}{1 + \text{ch}(2x)}$.

On en déduit que, pour tout $x \in \mathbf{R}^{\star}$,

$$f'_4(x) = \frac{x \frac{2\text{sh}(x)}{1 + \text{ch}(2x)} - \ln(1 + \text{ch}(2x))}{x^2} = \frac{2x\text{sh}(2x) - \ln(1 + \text{ch}(2x))(1 + \text{ch}(2x))}{x^2(1 + \text{ch}(2x))}.$$

5. f_5 est définie et dérivable sur $\mathbf{R}$ en tant que composée de fonctions définies et dérivables sur $\mathbf{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f'_5(x) = 8x \ln(3) \times 3^{4x^2-1}.$$

6. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\sin x = 0 \iff x \equiv 0 \pmod{\pi},$$

donc $x \mapsto 1/\sin(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbf{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

Soit $x \in] - \pi, \pi[\setminus \{0\}$.

$$\frac{1}{\sin(x)} > 0 \iff \sin x > 0 \iff x \in]0, \pi[.$$

Puisque $x \mapsto 1/\sin(x)$ est 2π -périodique, on en déduit que f_6 est définie et dérivable sur :

$$D = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}}]2k\pi, \pi + 2k\pi[.$$

La dérivée de $x \mapsto 1/\sin(x)$ sur D est $x \mapsto -\cos(x)/\sin^2(x)$ donc, pour tout $x \in D$,

$$f'_6(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{\sin(x)}}} = -\frac{\cos(x)\sqrt{\sin(x)}}{2\sin^2(x)}.$$

Exercice 71. Le but de l'exercice est l'étude de la fonction f définie par :

$$f(x) = \left(\sqrt{1 - \sin(2x)} + \sqrt{1 + \sin(2x)} \right)^{\frac{1}{\ln(|2 \cos(x)|)}}.$$

1. On introduit la fonction g définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $g : x \mapsto x \ln(x)$. Établir le tableau des variations de g et déterminer les limites de g aux bornes de son intervalle de définition.
2. Pour quelles valeurs du nombre réel x l'expression définissant $f(x)$ a-t-elle un sens ? On notera D l'ensemble de ces valeurs.
3. Vérifier que f est π -périodique. Cette fonction est-elle paire ? impaire ?
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\sqrt{1 - \sin(2x)} = |\cos(x) - \sin(x)| \quad \text{et} \quad \sqrt{1 + \sin(2x)} = |\cos(x) + \sin(x)|.$$

En déduire que f est constante sur $]0; \frac{\pi}{4}] \cap D$ et que, pour tout $x \in [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[\cap D$,

$$f(x) = \exp(h(4 \cos^2(x))),$$

où h représente la fonction définie pour tout $x \in]0; 1[\cup]1; 4[$ par :

$$h(x) = \frac{\ln(4-x)}{\ln(x)}.$$

5. Montrer que f est dérivable sur $] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[\cap D$ et exprimer sur cet intervalle la fonction f' à l'aide de la fonction h' .
6. Calculer $h'(x)$ pour tout $x \in]0; 1[\cup]1; 4[$.
7. En utilisant la question 1., déterminer le signe de h' sur $]0; 1[$ et sur $]1; 2[$.
8. A l'aide des résultats précédents, établir le tableau des variations de f (avec les limites) sur $] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[\cap D$.
9. Tracer le plus précisément possible le graphe de f sur $[-\pi; \pi] \cap D$.

Corrigé 71. 1. g est définie et dérivable sur $\mathbf{R}^{+*}$ en tant que produit de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbf{R}^{+*}$, $g'(x) = \ln(x) + 1$. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$g'(x) \geq 0 \iff \ln(x) \geq -1 \iff x \geq e^{-1},$$

donc g est décroissante sur $]0, e^{-1}]$ et est croissante sur $[e^{-1}, +\infty[$. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et, par croissances comparées, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = 0$.

x	0	e^{-1}	1	$+\infty$
g	0	$-e^{-1}$	0	$+\infty$

2. • Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$1 - \sin(2x) \geq 0 \iff \sin(2x) \leq 1 \iff x \in \mathbf{R},$$

donc, par composition de $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$ et de la fonction racine carrée, $x \mapsto \sqrt{1 - \sin(2x)}$ est définie sur $\mathbf{R}$. De même, puisque

$$1 + \sin(2x) \geq 0 \iff \sin(2x) \geq -1 \iff x \in \mathbf{R},$$

on obtient que $x \mapsto \sqrt{1 + \sin(2x)}$ est définie sur $\mathbf{R}$.

- Soit $x \in \mathbf{R}$. On a

$$\sqrt{1 - \sin(2x)} + \sqrt{1 + \sin(2x)} \leq 0 \iff \begin{cases} 1 - \sin(2x) = 0 \\ 1 + \sin(2x) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \\ 2x \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases},$$

donc, par composition, $x \mapsto \ln(\sqrt{1 - \sin(2x)} + \sqrt{1 + \sin(2x)})$ est définie sur $\mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$.

- Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$|2 \cos(x)| \leq 0 \iff 2 \cos(x) = 0 \iff x \equiv \frac{\pi}{2} [\pi],$$

donc, par composition, $x \mapsto \ln(|2 \cos(x)|)$ est définie sur $\mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$,

$$\begin{aligned} \ln(|2 \cos(x)|) = 0 &\iff |2 \cos(x)| = 1 \\ &\iff \cos(x) = -\frac{1}{2} \text{ ou } \cos(x) = \frac{1}{2} \\ &\iff x \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]. \end{aligned}$$

Ainsi, $x \mapsto \frac{1}{\ln|2 \cos x|}$ est définie sur $\mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

- Finalement,

$$D = \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{4}, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\},$$

i.e.

$$D = \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{4}, \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z} \right\},$$

3. Puisque $\sin$ et $\cos$ sont 2π -périodiques, la π -périodicité de f est immédiate à vérifier. Comme $\sin$ est impaire et $\cos$ est paire, la parité de f est également triviale.

4. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\sqrt{1 - \sin(2x)} = \sqrt{1 - 2 \sin(x) \cos(x)} = \sqrt{\cos^2(x) - 2 \sin(x) \cos(x) + \sin^2(x)} = |\cos(x) - \sin(x)|.$$

De même,

$$\sqrt{1 + \sin(2x)} = \sqrt{\cos^2(x) + 2 \sin(x) \cos(x) + \sin^2(x)} = |\cos(x) + \sin(x)|.$$

Soit $x \in [0, \pi/4] \cap D$. Alors $\cos(x) \geq \sin(x)$, $\cos(x) \geq 0$ et $\sin(x) \geq 0$, donc

$$\sqrt{1 - \sin(2x)} + \sqrt{1 + \sin(2x)} = 2 \cos(x),$$

puis

$$f(x) = \exp\left(\frac{\ln(2 \cos x)}{\ln|2 \cos x|}\right) = e.$$

Soit $x \in [\pi/4, \pi/2] \cap D$. Alors $\cos(x) \leq \sin(x)$, $\cos(x) \geq 0$ et $\sin(x) \geq 0$, donc

$$\sqrt{1 - \sin(2x)} + \sqrt{1 + \sin(2x)} = 2 \sin(x),$$

puis

$$f(x) = \exp\left(\frac{\ln(2 \sin(x))}{\ln(2 \cos(x))}\right) = \exp\left(\frac{2 \ln(2 \sin(x))}{2 \ln(2 \cos(x))}\right) = \exp\left(\frac{\ln(4 \sin^2(x))}{\ln(4 \cos^2(x))}\right) = \exp\left(\frac{\ln(4 - 4 \cos^2(x))}{\ln(4 \cos^2(x))}\right).$$

5. Soit $x \in]-\pi/4, \pi/2[\cap D$. D'après la question 2., $4 \cos^2(x) \in]0, 1[\cup]1, 4[$. Puisque les fonctions suivantes sont dérivables :

$$\begin{aligned}]-\pi/4, \pi/2[\cap D &\longrightarrow]0, 1[\cup]1, 4[, \quad \text{et } h, \quad \text{et } \exp \\ x &\longmapsto 4 \cos^2 x \end{aligned}$$

il s'ensuit que f est dérivable sur $]-\pi/4, \pi/2[\cap D$ et, pour tout $x \in]-\pi/4, \pi/2[\cap D$,

$$f'(x) = -8 \sin(x) \cos(x) h'(4 \cos^2 x) f(x).$$

6. h est dérivable sur $]0, 1[\cup]1, 4[$ en tant que quotient de fonctions dérivables, et, pour tout $x \in]0, 1[\cup]1, 4[$,

$$h'(x) = \frac{-\frac{\ln x}{4-x} - \frac{\ln(4-x)}{x}}{\ln(x)^2} = -\frac{x \ln x + (4-x) \ln(4-x)}{x(4-x) \ln(x)^2} = -\frac{g(x) + g(4-x)}{x(4-x) \ln(x)^2}.$$

7. On remarque que pour tout $x \in]0, 4[$, $x(4-x) > 0$.

Soit $x \in]0, 1[$. D'après la question 1., $g(x) \geq g(e^{-1})$, i.e. $g(x) \geq -e^{-1}$. Par ailleurs, $4-x \in]3, 4[$, donc, puisque g est croissante, $g(4-x) \geq 3 \ln 3$. Ainsi $g(x) + g(4-x) \geq -e^{-1} + 3 \ln 3 \geq 0$ (en effet, $\ln 3 > 1$ et $-e^{-1} > -1$).
Finalement, pour tout $x \in]0, 1[$, $h'(x) < 0$.

Soit $x \in]1, 2[$. Alors $g(x) > 0$ et, puisque $4-x \in]2, 3[$, $g(4-x) \geq g(2) \geq 0$. Donc pour tout $x \in]1, 2[$, $h'(x) < 0$.

Remarque : une étude sur $]0, 2[$ est suffisante car, pour tout $\pi/4 < x < \pi/2$, $0 < 4 \cos^2(x) < 2$.

8. Puisque $\lim_{x \rightarrow \pi/4} 4 \cos^2(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 1$, on a : $\lim_{x \rightarrow \pi/4} h(x) = e$. Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow \pi/2} 4 \cos^2(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$, d'où $\lim_{x \rightarrow \pi/2} f(x) = 1$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow \pi/3} 4 \cos^2(x) = 1$. Or, si $x \in]\pi/4, \pi/3[$, alors $\cos(x) > 1/2$, puis $4 \cos^2(x) > 1$. Comme $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = +\infty$,
 $x > 1$

on en déduit que $\lim_{x \rightarrow \pi/3} f(x) = +\infty$. De même, si $x \in]\pi/3, \pi/2[$, $\cos(x) < 1/2$, puis $4 \cos^2(x) < 1$. Comme

$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = -\infty$, on obtient $\lim_{x \rightarrow \pi/3} f(x) = 0$.

Enfin, avec la question précédente et puisque pour tout $x \in]\pi/4, \pi/2[\cap D$, $\sin(x) \geq 0$, $\cos(x) \geq 0$, $f(x) \geq 0$, on obtient que $f'(x) \geq 0$, ce qui implique que f est croissante sur $] \pi/4, \pi/3[$ et sur $] \pi/3, \pi/2[$, ce qu'on peut résumer avec un tableau de variations :

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
g	e	$+\infty$	1

9. Finalement, on a :

