
Les nombres complexes

Exercice 73. Donner la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

$$-3i, \quad 1+i, \quad 3-3i, \quad 1+i\sqrt{3}, \quad 3-\sqrt{3}i.$$

Exercice 74. Calculer $(1+i)^8$ à l'aide de la formule du binôme de Newton. Retrouver le résultat d'une deuxième manière en calculant d'abord $(1+i)^2$. Enfin, donner la forme trigonométrique de $1+i$ et en déduire à nouveau la forme algébrique de $(1+i)^8$.

Exercice 75. Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants.

$$(-\sqrt{3}-i)^{16}, \quad (1-i)^{21}, \quad \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{20}, \quad \left(\frac{1-3i}{1+2i}\right)^{10}.$$

Exercice 76. Calculer la forme trigonométrique du nombre complexe :

$$z = 1 + e^{i\frac{\pi}{5}} + e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{3\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}}.$$

Exercice 77. Résoudre l'équation d'inconnue réelle x :

$$1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) + \cos(4x) + \cos(5x) = 0.$$

Exercice 78. Soit $x \in \mathbf{R}$. Montrer que $\operatorname{Arctan}(x)$ est un argument du nombre complexe $1+ix$. En déduire les valeurs de :

$$\operatorname{Arctan}2 + \operatorname{Arctan}3, \quad \operatorname{Arctan}2 + \operatorname{Arctan}5 + \operatorname{Arctan}8, \quad 4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{239}.$$

Exercice 79. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue complexe z :

(1) $3z^2 - 4z + 2 = 0$	(2) $z^3 = 1$	(3) $z^7 = -1$
(4) $z^3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$	(5) $z^2 = 1+i$	(6) $z^6 + 2z^3 + 2 = 0$
(7) $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$	(8) $z^2 + 2(1-i)z + 8 - 2i = 0$	(9) $z^4 - 3iz^2 + i - 3 = 0$
(10) $z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0$	(11) $z^2 + 3(i-1)z + 2 - 3i = 0$	(12) $(z^2 + 1)^n = 1 \quad (n \geq 1)$
(13) $(z+1)^n = z^n \quad (n \geq 1)$	(14) $(\bar{z})^{n-1} = z \quad (n \geq 2)$	(15) $z^2 - 2\sin(\alpha)z + 2(1+\cos\alpha) = 0$
(16) $z^3 - 2z^2 + 8z - 7 = 0$	(17) $z^2 - (2+i\alpha)z + 2+i\alpha - \alpha = 0$	(18) $(z^2 + 1)^n - (z-i)^{2n} = 0 \quad (n \geq 1)$

Exercice 80. Soit n un entier naturel non nul. Résoudre l'équation suivante, d'inconnue complexe z ,

$$z^n + 2(z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z) + 1 = 0.$$

Exercice 81. Soit $(a, b) \in \mathbf{C}^2$ tel que $\bar{a}b \neq 1$. On pose $c = (a-b)/(1-\bar{a}b)$. Montrer que $|c| = 1$ si et seulement si $|a| = 1$ ou $|b| = 1$.

Montrer que $|c| < 1$ si et seulement si $|a|$ et $|b|$ sont tous deux strictement supérieurs ou strictement inférieurs à 1.

Exercice 82. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer la somme et le produit des racines n -ième de l'unité.

Exercice 83. On pose $u = e^{2i\pi/7}$, $S = u + u^2 + u^4$ et $T = u^3 + u^5 + u^6$. Calculer $S+T$ et ST . En déduire les valeurs de ces complexes.

Exercice 84. Soit $x \in \mathbf{R}$. Linéariser $\cos^2(x)$, $\cos^3(x)$ et $\sin^4(x)$.

Exercice 85. Soit $x \in \mathbf{R}$. Établir les formules suivantes :

$$(1) \quad \sin(4x) = 4 \cos^3(x) \sin(x) - 4 \cos(x) \sin^3(x) \quad (2) \quad \cos(4x) = \cos^4(x) - 6 \cos^2(x) \sin^2(x) + \sin^4(x).$$

Exercice 86. 1. Soit $x \in \mathbf{R}$. Exprimer $\cos(5x)$ à l'aide de $\cos(x)$.

2. En déduire que $\cos(\frac{\pi}{10})$ est racine du polynôme $16X^4 - 20X^2 + 5$.

3. Déterminer la valeur exacte de $\cos(\frac{\pi}{5})$.

Exercice 87. Montrer que pour tout entier naturel n et pour tout réel α vérifiant $\sin \alpha \neq 0$,

$$\sum_{k=0}^n \cos(2k\alpha) = \frac{\sin((n+1)\alpha) \cos(n\alpha)}{\sin \alpha}.$$

Exercice 88. Soit $(n, \alpha) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R}$ tel que $\cos(\alpha) \neq 0$. Calculer $\sum_{p=0}^n \frac{\cos(p\alpha)}{\cos(\alpha)^p}$.

Exercice 89. Soit z un nombre complexe tel que $|z| \neq 1$. Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$\left| \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \right| \leq \frac{1 - |z|^{n+1}}{1 - |z|}.$$

Exercice 90 (Identité du parallélogramme). Soient z et z' deux nombres complexes. Démontrer l'identité du parallélogramme :

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2|z|^2 + 2|z'|^2.$$

Justifier le nom de cette formule.

Exercice 91. On considère l'application $f: \mathbf{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbf{C}$. Déterminer et représenter les ensembles suivants :

$$z \mapsto \frac{z+i}{z-1}$$

$$E = \{z \in \mathbf{C} \setminus \{1\}, f(z) \in \mathbf{R}\}, \quad F = \{z \in \mathbf{C} \setminus \{1\}, |f(z)| = 1\}, \quad G = \left\{z \in \mathbf{C} \setminus \{1, -i\}, \arg(f(z)) = \frac{\pi}{2} [2\pi]\right\}.$$

Exercice 92. 1. Donner l'écriture complexe des trois transformations suivantes : la rotation de centre O et de mesure d'angle $\frac{2\pi}{3}$, la rotation de centre i et de mesure d'angle $-\frac{3\pi}{4}$, l'homothétie de centre $1+i$ et de rapport 4.

2. Quelle est l'image de $3i$ par la rotation de centre $1+i$ et de mesure d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

3. Déterminer la nature géométrique des applications suivantes : $z \mapsto iz + (1-3i)$ et $z \mapsto 3z + 6 - 2i$.

Exercice 93. Soient A, B et C trois points du plan de Cauchy, d'affixes respectives a, b et c . Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si j ou j^2 est solution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

Exercice 94 (Théorème de Napoléon). Soit ABC un triangle du plan, sur les côtés duquel on construit extérieurement des triangles équilatéraux ABC', BCA' et CAB' . Montrer que les centres de ces triangles sont les sommets d'un autre triangle équilatéral qui a même centre de gravité que le triangle ABC .

Exercice 95. Soit a, b, c et d quatre nombres complexes deux à deux distincts. On définit leur birapport par :

$$[a, b, c, d] = \frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)}.$$

Montrer que le birapport $[a, b, c, d]$ est réel si et seulement si les points d'affixes a, b, c et d sont alignés ou cocycliques.

Exercice 96. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe du plan de Cauchy. Sur les côtés de ce quadrilatère, on construit extérieurement quatre carrés. On nomme P, Q, R et S les centres de ces carrés, de telle sorte que le quadrilatère $PQRS$ ne soit pas croisé. Démontrer que les diagonales de ce quadrilatère sont perpendiculaires et de même longueur.