

---

# Primitives et équations différentielles

---

**Exercice 97.** Trouver une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto x \sin(3x^2 + 1)$$

$$f_2 : x \mapsto \frac{x^2 + 1}{(x^3 + 3x + 2)^3}$$

$$f_3 : x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$f_4 : x \mapsto \cos(x)(1 + \sin(x))^3$$

$$f_5 : x \mapsto x^2 \exp(x^3)$$

$$f_6 : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$$

$$f_7 : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}}$$

$$f_8 : x \mapsto \tan^2(x) + \sin^2(x)$$

$$f_9 : x \mapsto \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$$

$$f_{10} : x \mapsto \cos^4(x)$$

$$f_{11} : x \mapsto \frac{1}{3 + x^2}$$

$$f_{12} : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{4x(-1 - x)}}$$

$$f_{13} : x \mapsto \frac{2}{x^2 + 4x + 6}$$

$$f_{14} : x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$$

$$f_{15} : x \mapsto \sin(2x)e^x$$

$$f_{16} : x \mapsto \frac{1}{x + x(\ln x)^2}$$

$$f_{17} : x \mapsto \frac{\sin(2x)}{1 + \cos^2(x)}$$

$$f_{18} : x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)\sqrt{\tan(x)}}$$

$$f_{19} : x \mapsto \cos^2(2x) \sin(3x)$$

$$f_{20} : x \mapsto \frac{\cos(3x)}{\sqrt{\sin(3x)}}$$

$$f_{21} : x \mapsto e^{3x+1} \cos^2(x)$$

$$f_{22} : x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{\ln(x) + 1}}$$

$$f_{23} : x \mapsto \frac{3x + 4}{1 + x^2}$$

$$f_{24} : x \mapsto \frac{2}{x^2 - 5x + 6}.$$

**Exercice 98.** Calculer simultanément les intégrales

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(t) \, dt}{\sin(t) + \cos(t)} \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t) \, dt}{\sin(t) + \cos(t)},$$

en calculant leur somme et leur différence.

**Exercice 99.** En intégrant par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{-1}^1 t e^t \, dt$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos(2t) \, dt$$

$$I_3 = \int_0^1 \operatorname{Arctan}(t) \, dt$$

$$I_4 = \int_0^1 (1 + t^2) e^{2t} \, dt$$

$$I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2(t)} \, dt$$

$$I_6 = \int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{Arcsin}(t) \, dt.$$

**Exercice 100 (Intégrales de Wallis).** Pour tout entier naturel  $n$ , on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) \, dx.$$

1. Calculer  $I_0$  et  $I_1$ .
2. Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. En effectuant une intégration par parties, montrer que

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

3. En déduire que pour tout entier naturel  $p$ ,

$$I_{2p} = \frac{\pi}{2} \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

**Exercice 101.** En utilisant les changements de variables indiqués, calculer les intégrales suivantes :

|                                                            |                                                        |
|------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| $I_1 = \int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt$                 | en posant $u = \sqrt{t}$                               |
| $I_2 = \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$                           | en posant $t = \cos(u)$                                |
| $I_3 = \int_1^4 \frac{dt}{t+\sqrt{t}}$                     | en posant $u = \sqrt{t}$                               |
| $I_4 = \int_{-1}^{\frac{1}{\sqrt{2}}-1} \sqrt{t(-t-2)} dt$ | en posant $u = t+1$ puis $u = \cos(x)$                 |
| $I_5 = \int_1^2 \frac{dt}{e^t+1}$                          | en posant $u = e^t$                                    |
| $I_6 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{4t^2-4t+2} dt$           | en posant $u = 2t-1$ puis $u = \operatorname{sh}(x)$ . |

**Exercice 102.** 1. Déterminer des nombres réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que pour tout nombre réel  $x$  distinct de  $-7$ ,

$$\frac{1}{(7+x)(1+x^2)} = \frac{a}{7+x} + \frac{bx+c}{1+x^2}.$$

2. En posant  $u = \tan(t)$ , calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{7+\tan(t)}.$$

**Exercice 103.** A l'aide du changement de variable  $u = \ln(x)$ , déterminer une primitive sur  $\mathbf{R}_+^*$  de la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \sin(\ln(x)).$$

**Exercice 104.** 1. Déterminer une primitive sur  $\mathbf{R}_+^*$  de la fonction  $\ln$ .

2. A l'aide du changement de variable  $u = \sin(t)$ , déterminer une primitive sur  $]0; \frac{\pi}{2}[$  de la fonction  $f$  définie par

$$f(t) = \cos(t) \ln(\tan(t)).$$

**Exercice 105.** A l'aide du changement de variable  $u = \cos(2t)$ , déterminer une primitive sur  $]0; \frac{\pi}{2}[$  de la fonction  $f$  définie par

$$f(t) = \frac{\sin(t) \cos(t)}{(\tan(t))^2 + (\tan(t))^{-2}}.$$

**Exercice 106.** Pour tout couple d'entiers naturels  $(p, q)$ , on pose

$$I_{(p,q)} = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt.$$

1. Montrer que pour tout  $(p, q) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$ ,

$$I_{(p,q)} = \frac{q}{p+1} I_{(p+1,q-1)}.$$

2. En déduire que pour tout  $(p, q) \in \mathbf{N}^2$ ,

$$I_{(p,q)} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

3. Démontrer enfin que pour tout  $(p, q) \in \mathbf{N}^2$ ,

$$\sum_{k=0}^q \binom{q}{k} \frac{(-1)^k}{p+k+1} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

**Exercice 107.** Trouver les solutions des équations différentielles suivantes sur les intervalles  $I$  indiqués.

- |                                                    |                                                                               |
|----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| (a) $y' - 3y = e^{2x}$ sur $I = \mathbf{R}$ ;      | (e) $y' - y \tan x = \cos^{-3} x$ sur $I = ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ ; |
| (b) $xy' + 2y = 0$ sur $I = \mathbf{R}_+^*$ ;      | (f) $y'x \ln x - y = 3 \ln x$ sur $I = ]0; 1[$ ;                              |
| (c) $\sqrt{1-x^2}y' - y = 1$ sur $I = ]-1; 1[$ ;   | (g) $y' - 2y = \operatorname{sh}(x)$ sur $I = \mathbf{R}$ ;                   |
| (d) $(x^2-1)y' - xy = 1+x-x^2$ sur $I = ]-1; 1[$ ; | (h) $(x^2-1)y' + xy = x$ sur $I = ]1; +\infty[$ .                             |

**Exercice 108.** 1. Déterminer une primitive sur  $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  de  $f : x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$ . On pourra faire le changement de variable  $t = \sin(x)$ .

2. En déduire l'unique solution sur  $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$  du problème de Cauchy :

$$y' - y \tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}, \quad y(0) = 1.$$

**Exercice 109.** Déterminer une fonction à valeurs strictement positives solution sur  $\mathbf{R}_+^*$  de l'équation différentielle

$$xy' + y = -y^2 \ln(x).$$

On pourra commencer par faire une analyse et poser  $u = \frac{1}{y}$ .

**Exercice 110.** Trouver les solutions des équations différentielles suivantes sur  $\mathbf{R}$ .

- |                                    |                                          |
|------------------------------------|------------------------------------------|
| (a) $y'' - 3y' - 18y = e^{4x}$ ;   | (e) $y'' - 2y' + 5y = \cos(2x)$ ;        |
| (b) $y'' + 2y' - 8y = e^{2x}$ ;    | (f) $y'' - 6y' + 9y = 4e^{3x} + 1$ ;     |
| (c) $y'' - 10y' + 41y = \sin(x)$ ; | (g) $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin(x) + 3$ ; |
| (d) $y'' + 4y = e^{2x} \cos(x)$ ;  | (h) $y'' - y = \operatorname{sh}(x)$ .   |

**Exercice 111.** Déterminer une équation différentielle linéaire du second degré ayant pour ensemble de solutions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto (A \cos(x) + B \sin(x))e^{-5x} + 3 \end{array} : (A, B) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

**Exercice 112.** 1. Montrer que l'équation différentielle  $y'' + y = 3x^2$  admet une solution de la forme  $x \longmapsto ax^2 + bx + c$  avec  $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ .

2. En déduire l'unique solution du problème de Cauchy

$$y'' + y = 3x^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

**Exercice 113.** Déterminer l'ensemble des fonctions  $f$  dérivables sur  $\mathbf{R}$  vérifiant

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) + f'(-x) = \sin(2x).$$

On pourra raisonner par analyse-synthèse en commençant par montrer que de telles applications sont deux fois dérivables sur  $\mathbf{R}$ .

**Exercice 114.** 1. Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbf{R}$ . Notons  $g$  la primitive de  $f$  nulle en 0, et  $h$  la primitive de  $g$  nulle en 0. Montrer que, pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,

$$\int_0^x (2x - 3t)f(t) dt = 3h(x) - xh'(x).$$

2. En déduire l'ensemble des fonctions  $f$  continues sur  $\mathbf{R}$  vérifiant :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \int_0^x (2x - 3t)f(t) dt = \frac{x^2}{2}.$$

**Exercice 115.** Soit  $f : \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbf{R}$  une fonction continue. Le but de cet exercice est de trouver les solutions définies sur l'intervalle  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  de l'équation différentielle :

$$y'' + y = f$$

vérifiant  $y(0) = y(\frac{\pi}{2})$ . On introduit pour cela la fonction

$$\begin{aligned} F : \left[0; \frac{\pi}{2}\right] &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto -\cos(x) \int_0^x f(t) \sin(t) dt + \sin(x) \int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t) \cos(t) dt \end{aligned}$$

Montrer que  $F$  est deux fois dérivable. Exprimer  $F + F''$  en fonction de  $f$ , puis conclure.

**Exercice 116.** Le but de cet exercice est la résolution sur  $\mathbf{R}$  de l'équation différentielle

$$(t^2 + 1)y'' + ty' - y = t + \sqrt{t^2 + 1}. \quad (\text{E})$$

1. Démontrer que pour tous nombres réels  $x$  et  $t$ ,

$$\operatorname{sh}(x) = t \iff x = \ln \left( t + \sqrt{t^2 + 1} \right).$$

2. Soit  $f$  une fonction de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ , deux fois dérivable. On introduit la fonction :

$$\begin{aligned} z : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto f(\operatorname{sh}(x)) \end{aligned}$$

- (a) Montrer que  $z$  est deux fois dérivable sur  $\mathbf{R}$  et exprimer  $z'$  et  $z''$  à l'aide de  $f'$  et  $f''$ .
- (b) En déduire que  $f$  est solution sur  $\mathbf{R}$  de l'équation différentielle (E) si et seulement si  $z$  est solution sur  $\mathbf{R}$  de l'équation différentielle

$$y'' - y = e^x. \quad (E_1)$$

3. Résoudre sur  $\mathbf{R}$  l'équation différentielle  $(E_1)$ .
4. Conclure.

**Exercice 117.** 1. Résoudre l'équation différentielle

$$x^2 y'' + 3xy' + y = (x+1)^2$$

sur  $\mathbf{R}_+^*$  en effectuant le changement de variable  $t = \ln x$  (une fonction  $f$  définie sur  $\mathbf{R}_+^*$  étant fixée, on s'intéressera donc à la fonction  $z$  définie sur  $\mathbf{R}$  par  $z(t) = f(e^t)$ ).

2. Résoudre l'équation différentielle

$$(1+x^2)^2 y'' + 2x(1+x^2)y' + 4y = 0$$

sur  $\mathbf{R}$  en effectuant le changement de variable  $t = \operatorname{Arctan}(x)$ .

**Exercice 118.** Soit  $(E)$  l'équation  $(x^2 + 1)y'' - 2y = 0$ .

1. Montrer que si  $(E)$  admet une solution polynomiale de degré 2, alors elle est nécessairement de degré deux.
2. Trouver une solution polynomiale non nulle  $p$  de  $(E)$ .
3. Justifier qu'une fonction  $y$  deux fois dérivable de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  peut s'écrire sous la forme  $y = p \times z$ , où  $z$  est une fonction deux fois dérivable de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ .
4. Montrer qu'une fonction  $y : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$  deux fois dérivable est solution de  $(E)$  si et seulement si la fonction  $Z = z'$  (où  $z$  est définie comme à la question précédente) est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre un  $(E')$  à préciser.
5. Résoudre  $(E)$ .

**Exercice 119.** Soit  $\alpha \in \mathbf{R}$ . On cherche l'ensemble  $\mathcal{S}_\alpha$  des fonctions  $f$  de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  vérifiant, pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,  $f'(x) = -f(\alpha - x)$ .

1. Montrer qu'une telle fonction est de classe  $\mathcal{C}^2$  (c'est-à-dire qu'elle est deux fois dérivable et que  $f''$  est continue).
2. Montrer que les éléments de  $\mathcal{S}_\alpha$  sont solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2.
3. Conclure.

**Exercice 120.** Déterminer les applications  $f$  de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  telles que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) + \int_0^x (x-t)f(t) dt = 1.$$

**Exercice 121 (hors-programme).** Résoudre sur  $\mathbf{R}$  l'équation différentielle  $xy' - y = x$ .