
Ensembles et applications

Exercice 122. Ecrire en langage symbolique l'ensemble A des fonctions affines, puis l'ensemble B des triplets de réels dont la somme des composantes est nulle.

Exercice 123. Dessiner les parties suivantes de $\mathbf{R}^2$:

$$A = \overline{[0; 1] \times [0; 1]}, \quad B = \overline{[0; 1] \times [0; 1]}, \quad C = [0; 1] \times \overline{[0; 1]}, \quad D = \{(a, b) \in \mathbf{Z}^2 \mid a^2 + b^2 \leq 4\}.$$

Exercice 124. Montrer que :

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^4 = 4x - 2\} \subset \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[.$$

Exercice 125. Montrer les égalités ou les inclusions d'ensembles suivantes :

1. $\{z \in \mathbf{C} \mid |z - 1| = |z + 1|\} = \{z \in \mathbf{C} \mid \Re(z) = 0\}$;
2. $\mathbf{R}^- = \{x \in \mathbf{R} \mid \forall y \in \mathbf{R}^+, x \leq y\}$;
3. $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 = 4x - 2\} \subset \mathbf{R}^+$;
4. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \exists t \in \mathbf{R}_+, x = \ln(t) \text{ et } y = t - 1\} \subset \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \leq y\}$;
5. $\{(1 + 2t, 2 - t, -1 + 3t) : t \in \mathbf{R}\} \subset \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x + y - z = 5\}$;
6. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 4x - y = 1\} = \{(t + 1, 4t + 3) : t \in \mathbf{R}\}$.

Exercice 126. 1. Montrer que l'ensemble $E = \{z \in \mathbf{C} \mid \bar{z}(z - 1) = z^2(\bar{z} - 1)\}$ est inclus dans l'ensemble $F = \{0\} \cup \mathbf{U}$.
2. Soit $z \in \mathbf{U}$. Posons $\theta = \text{Arg}(z)$. Montrer que $z \in E$ si et seulement si $\theta \in \{-\frac{\pi}{2}; 0; \frac{\pi}{2}\}$.
3. Déterminer en extension l'ensemble E .

Exercice 127. Introduisons les ensembles :

$$A = \{2k : k \in \mathbf{Z}\}, \quad B = \{n \in \mathbf{N} \mid n \equiv 0 [2]\}, \quad C = \emptyset, \quad D = \{x \in \mathbf{R} \mid x^3 = 4x\}, \quad E = \{n \in \mathbf{Z} \mid e^{i\frac{n\pi}{2}} = 1\}.$$

Enoncer toutes les relations d'inclusion existant entre ces différents ensembles.

Exercice 128. 1. Prouver que :

$$\{x \mapsto A \cos(x) + B \sin(x) : (A, B) \in \mathbf{R}^2\} = \{x \mapsto A \cos(-x) + B \sin(-x) : (A, B) \in \mathbf{R}^2\}.$$

2. Prouver que :

$$\{x \mapsto A \cos(x) + B \sin(x) : (A, B) \in \mathbf{R}^2\} = \{x \mapsto A \cos(x + B) : (A, B) \in \mathbf{R}^2\}.$$

Exercice 129. 1. Ecrire, à l'aide de symboles mathématiques, les ensembles suivants :

- (a) A l'ensemble des couples (x, y) de nombres réels pour lesquels $x + 3y = 0$.
- (b) B l'ensemble des couples (x, y) de nombres réels pour lesquels il existe $t \in \mathbf{R}$ tel que $x = ty$.
- (c) C l'ensemble des couples (x, y) de nombres réels pour lesquels il existe $t \in \mathbf{R}$ tel que $x = ty$ ou $y = tx$.
- (d) D l'ensemble des couples (x, y) de nombres réels pour lesquels il existe $t \in \mathbf{R}$ tel que $x = ty$ et $y = tx$.

2. Prouver que $C = \mathbf{R}^2$.

3. Montrer que $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| = |y|\}$.

4. Enoncer toutes les relations d'inclusion existant entre ces différents ensembles.

Exercice 130. Soient A et B deux parties d'un ensemble E . Montrer que $A = B$ si et seulement si $A \cup B = A \cap B$.

Exercice 131. Déterminer

$$A = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} [-k; k], \quad B = \bigcap_{k \in \mathbf{N}^*} \left[-\frac{1}{k}; \frac{1}{k}\right], \quad \text{et} \quad C = \bigcap_{k \in \mathbf{N}^*} \left]0; \frac{1}{k}\right].$$

Exercice 132. Prouver que :

$$\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3\pi}{4} + k\pi\right] = \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

Exercice 133. Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des applications f définies sur $\mathbf{N}$ à valeurs dans $\mathbf{N}$ vérifiant pour tout $(n, m) \in \mathbf{N}^2$,

$$f(n + m) = f(n)f(m).$$

1. Soit $f \in \mathcal{E}$.
 - (a) Montrer que $f(0) \in \{0, 1\}$.
 - (b) Supposons $f(0) = 0$. Montrer que $f = 0$.
 - (c) Supposons $f(0) = 1$. Posons $a = f(1)$. Montrer que $f(n) = a^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
 - (d) Quelle inclusion d'ensemble a-t-on établie ?
2. Conclure.

Exercice 134. 1. Décrire les ensembles $\mathcal{P}(\{1; 2; 3\})$ et $\mathcal{P}(\{1; 2; 3; 4\})$.
 2. Conjecturer le nombre d'éléments de l'ensemble $\mathcal{P}([1, n])$ pour un entier naturel n fixé.

Exercice 135. Décrire l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\}))$.

Exercice 136. Soient A , B et C trois parties d'un ensemble E . Montrer que :

1. $A \cap B = A \cap C$ si et seulement si $A \cap (E \setminus B) = A \cap (E \setminus C)$;
2. si $A \cap B \subset A \cap C$ et $A \cup B \subset A \cup C$, alors $B \subset C$.

Exercice 137. Soit A et B deux parties d'un ensemble E non vide. On définit la **différence symétrique** de A et B par

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1. Montrer que, pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, $\mathbf{1}_{A \Delta B} = (\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B)^2$.
2. Montrer que, pour tout $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$, $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

Exercice 138. Soient A et B deux parties d'un ensemble E . Que dire des assertions suivantes ?

1. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$;
2. $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

Exercice 139. L'application $x \mapsto 2x$ est-elle injective, surjective, bijective de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$? Est-elle injective, surjective, bijective de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$?

Exercice 140. On considère l'application $f: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$.

$$z \longmapsto e^z$$

1. L'application f ainsi définie est-elle injective ? surjective ?
2. Déterminer et représenter dans le plan de Cauchy l'image réciproque de $\mathbf{U}$ par f .
3. Déterminer et représenter dans le plan de Cauchy l'image directe de l'ensemble $A = \{x + i\frac{\pi}{4} : x \in \mathbf{R}\}$ par f .

Exercice 141. 1. Posons $E = F = \mathbf{R}$. L'application $f : \begin{matrix} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & x^2 \end{matrix}$ est-elle injective, surjective, bijective ?

2. Mêmes questions dans les cas $E = \mathbf{R}$, $F = \mathbf{R}_+$, puis $E = \mathbf{R}_+$, $F = \mathbf{R}$, puis $E = F = \mathbf{R}_+$.

Exercice 142. L'application $\begin{matrix} \mathbf{N}^2 & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ (n, m) & \longmapsto & n + m \end{matrix}$ est-elle injective, surjective, bijective ?

Exercice 143. 1. Déterminer une bijection notée f de $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}^*\}$ sur $B = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}\}$.

2. Prouver que l'application $\varphi : \begin{matrix} [0; 1] & \longrightarrow & [0; 1[\\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ x & \text{sinon} \end{cases} \end{matrix}$ est bijective.

Exercice 144. On introduit l'application $f : \begin{matrix} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 + 4x + 1 \end{matrix}$.

- Montrer que f réalise une bijection de $[-2; +\infty[$ sur son image et déterminer l'application réciproque associée.
- Déterminer $f([-3; 0])$, $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{-4\})$ et $f^{-1}([0; 1])$.

Exercice 145. Montrer que l'application $f : \begin{matrix} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + y, x - y) \end{matrix}$ est bijective. Déterminer son application réciproque.

Exercice 146. On considère la fonction $f : \begin{matrix} \mathbf{C} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \frac{\bar{z}+1}{z-1} \end{matrix}$.

- Montrer que pour tout $\mathbf{C} \setminus \{1\}$, $f(z) \neq 1$.
- Déterminer l'ensemble $f(i\mathbf{R})$.
- f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 147. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ? Lorsque celle-ci existe, déterminer l'application réciproque.

$$\begin{array}{ll} f_0 : \begin{matrix} [-1; 1] & \longrightarrow & [-1; 1] \\ x & \longmapsto & \frac{2x}{x^2+1} \end{matrix} & f_1 : \begin{matrix} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (3x + y + z, x + 2z) \end{matrix} \\ f_2 : \begin{matrix} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (3x + y + 2z, x + 2z, x + y - z) \end{matrix} & f_3 : \begin{matrix} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x - y, 2x + y, x + y) \end{matrix} \\ f_4 : \begin{matrix} \mathbf{C} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbf{U} \\ z & \longmapsto & \frac{z}{|z|} \end{matrix} & f_5 : \begin{matrix} \mathbf{C} \setminus \{2i\} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \frac{z+1}{z-2i} \end{matrix} \end{array}$$

Exercice 148. On considère l'application $f : \begin{matrix} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sin(\frac{1}{x}) \end{matrix}$.

- L'application f est-elle injective, surjective, bijective ?
- Déterminer $f^{-1}(\{0\})$.
- Déterminer $f([0; 1])$.

Exercice 149. Soit $w \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{U}$. On considère l'application $f : \begin{matrix} \mathbf{U} & \longrightarrow & \mathbf{U} \\ z & \longmapsto & \frac{z+w}{1+\bar{w}z} \end{matrix}$.

- Montrer que la définition de f est licite, c'est-à-dire que pour tout $z \in \mathbf{U}$, l'expression $f(z)$ est correctement définie et appartient à $\mathbf{U}$.
- Montrer que f est bijective, et déterminer son application réciproque.

Exercice 150. Soient E, F, G trois ensembles, f une application bijective de E dans F , g une application bijective de F dans G . Montrer que l'application $g \circ f : E \longrightarrow G$ est bijective, et déterminer son application réciproque en fonction des applications f^{-1} et g^{-1} .

Exercice 151. Soient E, F, G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G . Montrer que :

1. si $g \circ f$ est injective, alors f est injective ;
2. si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective ;
3. si $g \circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective ;
4. si $g \circ f$ est surjective et g est injective, alors f est surjective.

Exercice 152. Montrer qu'il existe une unique application injective $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) \leq n$.

Exercice 153. Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F .

1. Soient A, B deux parties de E . Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Que dire de l'assertion $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$?
2. Soient A, B deux parties de F . Montrer que $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Que dire de l'assertion $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$?

Exercice 154. On définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ en posant

$$(p, q) \mathcal{R} (p', q') \quad \text{lorsque} \quad pq' = p'q.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$.

Exercice 155. Soit E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application bijective. Montrer que pour toute partie B de F , l'image réciproque par f de la partie B coïncide avec l'image directe par f^{-1} de la partie B .

Exercice 156 (Théorème de Cantor). Soit E un ensemble. On souhaite démontrer qu'il n'y a pas de surjection de E sur $\mathcal{P}(E)$.

1. Soit $f : E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$. Posons $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$. En raisonnant par l'absurde, montrer que

$$\forall x \in E, \quad f(x) \neq A.$$

2. Conclure.

Exercice 157. Soit E un ensemble non vide, soit A et B deux parties de E .

1. Montrer que si $A \cap B = \emptyset$, alors pour toute partie X de E ,

$$(X \cup A) \cap (X \cup B) = X.$$

2. Soit l'application $f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)^2$

$$X \longmapsto (X \cup A, X \cup B)$$

- (a) Montrer que f n'est pas surjective.
- (b) Montrer que f est injective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

Exercice 158. Soit f une application de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ vérifiant $f(1) = 1$ et telle que

$$\forall (m, n) \in \mathbf{N}^2, \quad f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n).$$

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des points fixes de f , i.e.

$$\mathcal{F} = \{a \in \mathbf{N} \mid f(a) = a\}.$$

1. Montrer que $f(0) = 0$.
2. En déduire que $f \circ f = f$.
3. Montrer que $f(\mathbf{N}) = \mathcal{F}$.
4. Montrer que pour tout $a \in \mathcal{F}$, $a + 1 \in \mathcal{F}$.
5. En déduire que $\mathcal{F} = \mathbf{N}$ et en déduire f .