Entiers, ensembles finis, dénombrement

Exercice 159. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$, l'entier $5^n - 3^n$ n'est pas un nombre premier.

Exercice 160. Soient a et b deux entiers naturels de même parité. Montrer que $\dfrac{a^3+b^3}{2}$ est un entier naturel non premier.

Exercice 161. Soit n un entier naturel. Montrer que le nombre $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

Exercice 162. Soit n un entier naturel non nul et q un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer que si q divise n, alors q ne divise pas $n+1$. En utilisant ce résultat, montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice 163. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer qu'aucun des entiers

$$n!+2, \quad n!+3, \quad \cdots \quad n!+n$$

n'est premier. Que peut-on en déduire ?

Exercice 164.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 10^n par 9 est égal à 1. En déduire le critère de divisibilité par 9 : un entier est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
2. Démontrer le critère de divisibilité par 11 : un entier est divisible par 11 si et seulement si la somme alternée de ses chiffres est divisible par 11 (la somme alternée de 123 456 est $1-2+3-4+5-6$).

Exercice 165 (*Nombres de Mersenne*).

1. Soit p et q deux entiers naturels. Montrer que $(2^p - 1) \mid (2^{pq} - 1)$.
2. En déduire que pour tout entier naturel, si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier.
3. La réciproque est-elle vraie ? (on pourra tester les entiers premiers inférieurs à 13).

Exercice 166. Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que les fractions $\dfrac{12n+1}{30n+2}$ et $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ sont irréductibles.

Exercice 167. On divise 2003 par n, le reste est égal à 8. On divise 3002 par n, le reste obtenu est 27. Que vaut n ?

Exercice 168.

1. Déterminer les entiers naturels vérifiant $\begin{cases} \mathrm{PGCD}(x,y) &= 3 \\ x+y &= 21 \end{cases}$.
2. Déterminer les entiers naturels vérifiant $\begin{cases} \mathrm{PGCD}(x,y) &= 6 \\ \mathrm{PPCM}(x,y) &= 72 \end{cases}$.

Exercice 169 (*Petit théorème de Fermat*). Soit p un nombre premier.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k}$.
2. En déduire que pour tout entier a, $a^p - a$ est un multiple de p. On pourra utiliser un raisonnement par récurrence.

Exercice 170. Dans une classe de 38 élèves étudiant chacun au moins une langue, 31 étudient l'anglais, 24 l'espagnol, 17 l'allemand et 12 étudient à la fois anglais et allemand, 9 étudient espagnol et allemand, et 4 élèves étudient les trois langues simultanément. Calculer le nombre d'élèves :

1. étudiant l'anglais et l'espagnol ;
2. étudiant l'anglais ou l'espagnol ;
3. étudiant uniquement l'allemand.

Exercice 171. Dénombrer les nombres de 4 chiffres écrits uniquement avec les chiffres 1, 2 et 3.

Exercice 172. Une urne contient dix boules numérotées de 0 à 9. On tire quatre boules de l'urne. Dénombrer le nombre de tirages possibles dans les trois cas suivants :

1. les tirages sont successifs et sans remise ;
2. les tirages sont successifs et avec remise ;
3. les tirages sont simultanés.

Exercice 173. Combien de mots de trois lettres (ayant un sens ou non) peut-on former en utilisant uniquement les lettres du mot PARIS, sans répétition ? Combien d'anagrammes (ayant un sens ou non) du mot PARIS existe-t-il ? Reprendre cette dernière question avec le mot BILLE, puis avec le mot ESCARPOLETTE.

Exercice 174. On rappelle qu'un jeu de 32 cartes est constitué de quatre familles : pique, cœur, carreau et trèfle, chacune constituée de huit cartes : As, Roi, Dame, Valet, 10, 9, 8, 7. On tire successivement et sans remise huit cartes dans un jeu de 32 cartes.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien de tirages contiennent au moins un as ?
3. Combien de tirages comprennent au moins un pique ou une dame ?

Exercice 175. Dans un jeu de 32 cartes, on choisit (simultanément) cinq cartes au hasard.

1. Quel est le nombre total de mains que l'on peut obtenir ? (une main désigne les cartes détenues par le joueur)
2. Combien de ces mains contiennent exactement 4 as ?
3. Combien de ces mains contiennent exactement 3 as et 2 rois ?
4. Combien de ces mains contiennent au moins 3 rois ?
5. Combien de ces mains contiennent au moins un as ?
6. Combien de ces mains contiennent exactement 2 as et 2 carreaux ?

Exercice 176. Douze livres deux à deux distincts sont placés côte à côte sur une étagère. Parmi ceux-ci, trois constituent les trois tomes d'un roman.

1. Quel est le nombre de dispositions de ces douze livres pour lesquelles les trois tomes du roman sont côte à côte, dans l'ordre (de gauche à droite : tome 1, 2 puis 3) ?
2. Quel est le nombre de dispositions de ces douze livres pour lesquelles les trois tomes du roman sont côte à côte, mais pas forcément dans l'ordre ?

Exercice 177. Une urne contient cinq boules rouges numérotées de 1 à 5, et sept boules noires numérotées de 1 à 7. On effectue quatre tirages successifs et avec remise. Dénombrer

1. les différents tirages possibles ;
2. les tirages amenant quatre boules rouges ;
3. les tirages amenant au moins une boule rouge ;
4. les tirages amenant trois boules rouges et une boule noire ;
5. les tirages bicolores.

Reprendre chacune de ces questions dans le cas de tirages successifs et sans remise, puis dans le cas de tirages simultanés.

Exercice 178. Soit A un ensemble fini de cardinal n, et B une partie de A de cardinal p. Dénombrer les parties X de A vérifiant $B \subset X \subset A$.

Exercice 179. Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbf{N}^\star$.

1. Déterminer le nombre d'applications surjectives de E dans E.
2. Déterminer le nombre d'applications de E dans E qui ne sont pas surjectives.
3. Déterminer le nombre d'applications surjectives de E dans $\{0, 1\}$.

4. Déterminer le nombre d'applications surjectives de E dans $\{0, 1, 2\}$.

Exercice 180. On répartit n boules indiscernables dans trois boîtes différentes. Combien y a-t-il de répartitions telles que deux boîtes exactement contiennent des boules ?

Exercice 181. Une liste palindrome est une liste qui se lit de la même façon à l'endroit ou à l'envers, comme 12321 ou 052250.

1. Combien y a-t-il de listes palindromes à 15 chiffres ?
2. Combien y a-t-il de listes de 5 chiffres où 0 figure une fois et une seule ?
3. Combien y a-t-il de listes de 5 chiffres comportant un chiffre répété et un seul ?
4. Combien y a-t-il de listes formant une suite de 5 chiffres strictement croissantes ?

Exercice 182. On dispose dix jetons de Scrabble portant les lettres de l'alphabet de A à J.

1. Combien de mots de dix lettres (ayant un sens ou non) peut-on écrire avec ?
2. Combien de mots de dix lettre (ayant un sens ou non) peut-on écrire où B, A et C apparaissent dans ce ordre et côte à côte ?

Exercice 183. Soit $(n, p) \in (\mathbf{N}^\star)^2$. Déterminer le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

Exercice 184. On se place dans le plan muni du quadrillage $\mathbf{N}^2$. On ne peut se déplacer que vers la droite ou vers le haut.

1. Combien y a-t-il de chemins permettant de relier le point $(0, 0)$ au point $(2, 2)$?
2. Combien y a-t-il de chemins permettant de relier le point $(0, 0)$ au point $(4, 4)$?
3. Parmi ces chemins, combien y en a-t-il passant par le point $(1, 2)$?

Exercice 185. Soit $n \in \mathbf{N}$.

1. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x + y = n$ dans $\mathbf{N}^2$.
2. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x + y + z = n$ dans $\mathbf{N}^3$.
3. On décide de représenter les solutions de $x+y+z = n$ dans $\mathbf{N}^3$ de la manière suivante : une solution (x, y, z) est codée par le mot binaire comportant des séquences de x, y et z chiffres 1 séparées par le chiffre 0 : par exemple, pour $n = 6$, la solution $(2, 1, 3)$ sera codée par le mot binaire 11010111.
   Retrouver le résultat de la question 2 en utilisant cette représentation des solutions.
4. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n$ dans $\mathbf{N}^p$.
5. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n$ dans $(\mathbf{N}^\star)^p$.
6. Combien y a-t-il de façons de ranger n objets indiscernables dans n tiroirs différents ?

Exercice 186. En descendant les marches d'un escalier par une ou deux à la fois, de combien de façons peut-on descendre un escalier à 12 marches ? à 13 marches ? Généraliser au cas d'un escalier à n marches.

Exercice 187. Soit $n \in \mathbf{N}$. Dénombrer de deux façons les parties d'un ensemble à n éléments. En déduire l'égalité suivante : $\displaystyle\sum_{k=9}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. Retrouver cette égalité en développant l'expression $(1 + x)^n$ pour $x = 1$.

Exercice 188. Soit n, p deux entiers naturels vérifiant $p \leqslant n$. Le but de l'exercice est de montrer, de trois manières différentes, que

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}.$$

1. Simplifier le produit des coefficients binominaux et utiliser l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} = 2^p$.
2. Montrer l'égalité demandée en remarquant que $((1 + X) + X)^n = (1 + 2X)^n$.
3. Montrer l'égalité demandée en dénombrant de deux façons différentes l'ensemble des couples (A, B) de parties d'un ensemble E de cardinal n, vérifiant $\mathrm{Card}(B) = p$ et $A \subset B$.